

На правах рукописи

Чжан Хао

**Разработка рациональной методики расчета роликовых подшипников для  
применения в задачах роторной динамики**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук



Москва – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор технических наук, доцент, профессор  
**Сорокин Фёдор Дмитриевич**

Официальные оппоненты: **Муницын Александр Иванович**, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ МЭИ)

**Боровский Георгий Владиславович**, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, генеральный директор акционерного общества «Всероссийский научно-исследовательский инструментальный институт» (ВНИИИНСТРУМЕНТ)

Ведущая организация: Акционерное общество «Научно-производственное объединение «Центральный научно-исследовательский институт технологии машиностроения» (ЦНИИТМАШ)

Защита состоится «22» мая 2019 г. в 14:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.141.03 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Ваш отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по указанному адресу.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте [www.bmstu.ru](http://www.bmstu.ru).

Телефон для справок: +7(499)263-66-39

Автореферат разослан « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.т.н., доцент



М.В. Мурашов

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Подшипниковые узлы являются важнейшими структурными элементами машин и приборов. При решении задач роторной динамики вращающихся машин большое значение имеет определение их упругих свойств. Последние в настоящее время практически для любых типов подшипников могут быть рассчитаны методом конечных элементов (МКЭ), при использовании которого кольца и тела качения разбиваются на пространственные конечные элементы. Однако такие численные модели малоприспособны для решения задач роторной динамики, так как обычно содержат неприемлемо большое число степеней свободы и требуют чрезмерно много вычислительных ресурсов компьютера. Численные эксперименты показывают, что полное решение динамической контактной задачи, включающей в себя полный оборот внутреннего кольца подшипника относительно внешнего, с применением пространственных конечных элементов, может занимать несколько десятков часов. Помимо этого, построение такой модели нетривиально и требует немало времени со стороны расчетчика, который при этом должен прекрасно разбираться в особенностях того или иного КЭ комплекса. В связи с этим следует признать актуальным разработку упрощенной методики расчета роликовых подшипников, в которой количество степеней свободы минимально, а механические явления в области контакта тел качения с кольцами рассматриваются приближенно.

В задачах роторной динамики машин, состоящих из валов, зубчатых передач, подшипников и других вращающихся элементов, для описания больших поворотов применяется не один десяток способов. Наиболее привлекательными для приложений (например, для МКЭ) являются способы, в которых используются минимальное количество кинематических параметров равное трём (3 угла, либо 3 проекции вектора поворота). Но такие способы встречаются со специфической проблемой, которая ограничивает максимальное значение поворота, то есть возникает проблема критических углов. Эффективное и достаточно простое в реализации решение проблемы критических углов в задачах роторной динамики, предложенное в диссертации, также является актуальным.

**Целью диссертационной работы** является разработка и экспериментальная верификация рациональной методики расчета роликовых подшипников, обладающей высоким быстродействием и точностью, для проектирования сложных динамических систем и механизмов.

**Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:**

1. Разработана энергетическая модель роликового подшипника (ЭМРП), позволяющая существенно проще, чем альтернативные методики, определять упругие реакции и жесткости подшипника.
2. Применение квазиньютоновского метода позволило преодолеть расходимость итерационного процесса, которая ранее приводила к большим трудностям при решении нелинейных уравнений равновесия ролика между кольцами подшипника методом Ньютона.
3. Исследованы упругие свойства (зависимости, связывающие упругие реакции, жесткости, перемещения и инерционные нагрузки) для роликовых

подшипников различной конструкции.

4. Корректность и высокая точность разработанной методики продемонстрирована прямой экспериментальной верификацией в сочетании с МКЭ.
5. Разработан прием кинематически точного разделения большого поворота на осевой и поперечный, который полностью снимает проблему критических углов.
6. Работоспособность и эффективность разработанной методики подтверждена численными расчетами в имитационной задаче роторной динамики на переходных режимах движения ротора.

**Методы исследования.** В диссертации используются квазиньютоновский метод, МКЭ, приём конденсации степеней свободы ролика, метод наименьших квадратов, явный метод Рунге-Кутты и разработанный с участием автора метод кинематически точного разделения большого поворота на осевой и поперечный, решающий проблему критических углов.

#### **Научная новизна:**

1. Создан новый энергетический подход для определения сил, действующих на ролик со стороны колец и бортиков, а также матриц жесткости ролика и всего подшипника в целом. Характерной особенностью подхода является ранее не применявшийся в данных задачах и легко реализуемый способ вычисления сил и жесткостей через первые и вторые производные энергии деформации.
2. Доказано, что ЭМРП применима для роликовых подшипников любого вида за исключением сферических, так как представленные в диссертации соотношения не зависят от конкретного типа подшипника. В качестве приложения ЭМРП рассчитаны упругие свойства роликовых подшипников различной конструкции в том числе с учетом центробежных сил и гироскопических моментов, действующих на тела качения.
3. Для задач роторной динамики создана новая рациональная методика кинематически точного разделения большого поворота на осевой и поперечный, с использованием которой решена проблема критических углов.

**Достоверность результатов** подтверждается строгостью использованных математических методов, проверкой разработанных алгоритмов и программ на модельных и тестовых задачах, сопоставлением полученных результатов с результатами натуральных экспериментов, МКЭ, а также с известными результатами других авторов, в том числе производителя подшипников компании FAG (Германия).

#### **Практическая значимость диссертации:**

1. ЭМРП позволяет предсказывать механические явления в роликовых подшипниках уже на этапе проектирования опорных узлов, что повышает достоверность расчета всей роторной системы.
2. ЭМРП намного экономичнее, чем методики, использующие МКЭ, особенно в применении к задачам роторной динамики, что позволяет рациональней использовать вычислительные ресурсы компьютера и весьма существенно сократить время расчета.

3. Использование ЭМРП значительно сокращает объем экспериментальных исследований и ускоряет сроки разработки новых конструкций подшипниковых узлов.
4. Разработанная с участием автора методика разделения большого поворота на осевой и поперечный окажется полезной и при решении задач роторной динамики машин, состоящих из других вращающихся элементов, например, валов и зубчатых передач, в которых поперечный поворот ограничен конструктивными соображениями.

**На защиту выносятся следующие положения диссертации:**

1. Разработанная быстродействующая и достаточно точная ЭМРП для определения упругих свойств роликового подшипника любого типа.
2. Анализ результатов численных расчетов различных типов роликовых подшипников и выполнение экспериментальной верификации.
3. Применение ЭМРП в имитационной задаче роторной динамики летательных аппаратов.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и были одобрены на семинаре молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения имени Ю.Н. Работнова (Москва, 2019); на конференции «Будущее машиностроения России» (Москва, 2018); на конференции «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ, 2018); на конференции «VIBROENGINEERING» (Брно, 2018); на научно-методической и научно-исследовательской конференции МАДИ (Москва, 2018); на конференции «Машиноведение и инновации» (Москва, 2017 и 2016); на конференции «Механика и математическое моделирование в технике» (Москва, 2017); на школе-конференции «Нелинейная динамика машин» School-NDM (Москва, 2017).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, в том числе 4 работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и 1 работа в изданиях, индексируемых в Scopus.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Общий объем составляет 162 страницы, 88 рисунков и 9 таблиц. Список используемой литературы содержит 135 наименований.

### **Содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, приведена постановка задач и краткая аннотация содержания работы по разделам, дана оценка научной новизны и практической значимости полученных результатов и представлены методы исследования в диссертации.

**В первой главе** выполнен обзор работ, посвященных современному состоянию проблемы расчета роликовых подшипников и основным задачам, рассмотренным в диссертации. Приведена конструкция и выполнена классификация роликовых подшипников с обсуждением применения роликовых подшипников в технике. Показано последовательное развитие способов решения контактных задач с использованием теории Герца, МКЭ и МГЭ. Представлены известные методики

расчета роликовых подшипников других авторов, в частности, методика из курса деталей машин, методика Ф.Г. Нахатакяна, методика J.M. de Mul и методика Y. Guo. Произведено сопоставление различных способов описания больших поворотов. Кроме того, выполнен анализ различных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения в задачах роторной динамики.

**Вторая глава** посвящена разработке ЭМРП с учетом требований характерных для задач роторной динамики (хорошее быстродействие и высокая точность). В ЭМРП каждое из колец рассматривалось как абсолютно жесткое тело с 6-ю степенями свободы, но локальные деформации колец от взаимодействия с роликами были учтены в коэффициентах контактной жесткости. Матрица жесткости и вектор сил подшипника строились формальным дифференцированием энергии деформации всей системы кольца-ролика, поэтому для разработанной теории и было выбрано название «ЭМРП».

ЭМРП создана при следующих допущениях: 1) Проскальзывание между роликами и дорожками качения отсутствует; 2) Смазка не учитывается; 3) Деформации колец от растяжения и изгиба не учитываются, но учитываются упругие деформации, связанные с контактным взаимодействием.

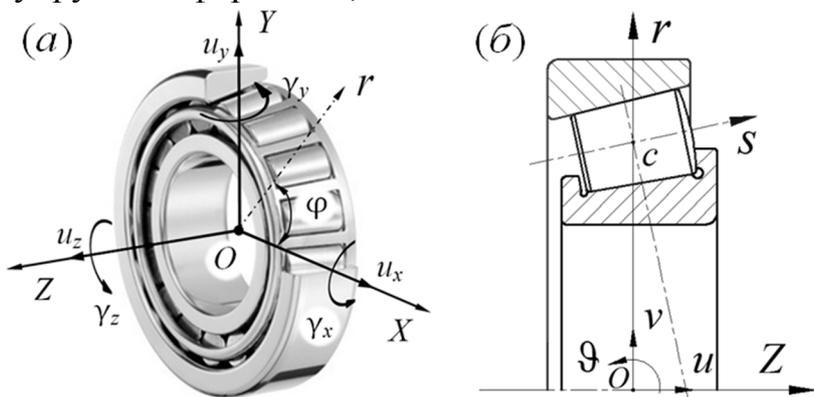


Рис. 1. Роликовый подшипник и используемые системы координат

ЭМРП имеет 12 степеней свободы, перемещения колец рассматриваются в глобальной системе координат  $OXYZ$  (Рис. 1, а). Движение роликов принимается плоским (3 степени свободы в системе координат  $OZr$ ) (Рис. 1, б).

Для упрощенного решения контактной задачи заимствована техника разбиения тела вращения на

отдельные диски (slicing), согласно которой ролик можно рассматривать как набор тонких дисков, жестко закрепленных на оси ролика (Рис. 2, а). При использовании указанной техники геометрия ролика задается массивом чисел

$$\{s_1, b_1, \Delta s_1\}, \{s_2, b_2, \Delta s_2\}, \dots, \{s_N, b_N, \Delta s_N\},$$

где расстояние до текущего диска  $s_k$  отсчитывается от центра ролика;  $b_k$  – радиус диска;  $\Delta s_k$  – ширина диска с номером  $k$ .

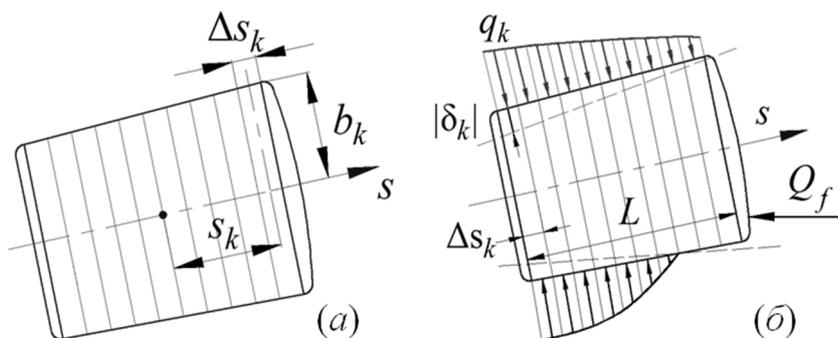


Рис. 2. Разбиение ролика на отдельные диски и его контакт с кольцами

Ролик контактирует с кольцами боковыми (линейный контакт) и торцевыми поверхностями (точечный контакт). Схема контактирования ролика с

кольцами показана на Рис. 2, б. Здесь  $q_k$  – распределённая нагрузка на единицу контактной длины диска;  $\delta_k$  – расстояние до контактной поверхности (отрицательное расстояние означает контакт);  $Q_f$  – сила, вызванная контактом ролика с бортиком;  $L$  – эффективная длина контакта.

В случае контакта ролика с кольцами описание контактного поведения основано на теории Andreason о том, что контактную нагрузку на единицу длины каждого диска можно получать по таким же соотношениям, как для всего ролика, поджатого по всей эффективной длине так же, как рассматриваемый диск. Очевидно, что при параллельном смещении ролика относительно кольца эта теория выполняется точно. На основе теории Andreason и многочисленных экспериментов Palmgren предложил эмпирическое соотношение, связывающее распределённую контактную нагрузку, действующую на ролик со стороны кольца, и поджатие:

$$q_k = 0,355 E_s L \left( \frac{|\delta_k|}{L} \right)^{10/9}, \quad \frac{1}{E_s} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right), \quad (1)$$

где  $E_s$  – эквивалентный модуль упругости;  $E_1, E_2$  – модули упругости контактирующих тел;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона.

В случае контакта ролика с бортиками (flang) контактная сила определялась на основе теории Герца. Формула заимствована из контактной задачи Герца для тел с поверхностями ненулевой Гауссовой кривизны, к которым обычно относится торцевая поверхность ролика:

$$Q_f = c_f E_s R^2 \left( \frac{|\delta_{flang}|}{R} \right)^{3/2}, \quad (2)$$

где  $\delta_{flang}$  – зазор между роликом и бортиком;  $R$  – радиус кривизны торцевой поверхности ролика;  $c_f$  – безразмерная константа, определенная по теории Герца.

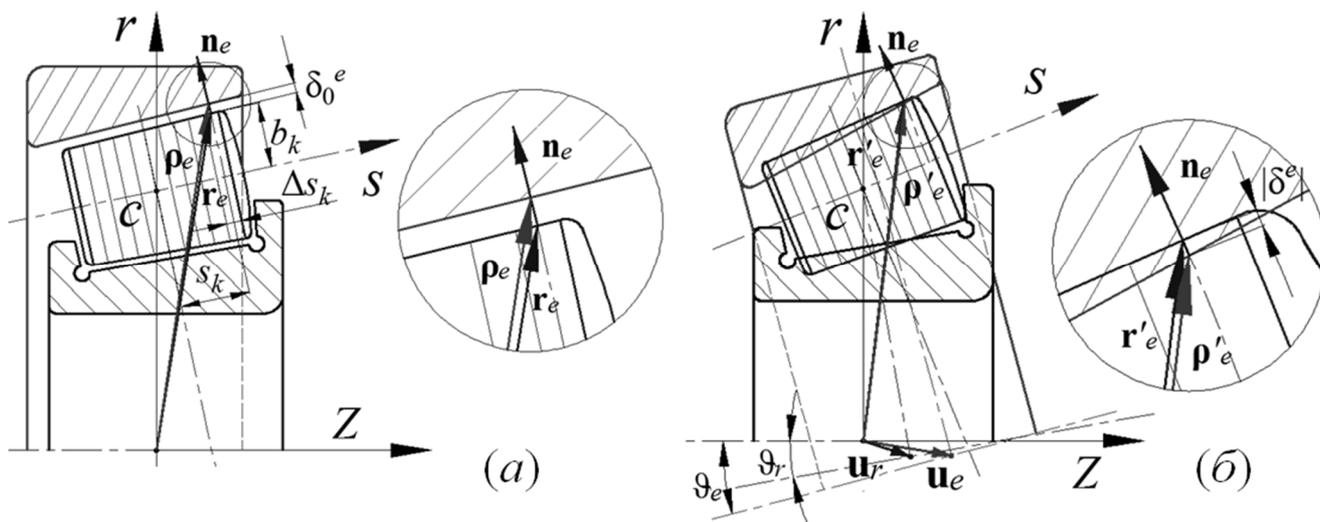


Рис. 3. Положение контактных точек ролика и колец

Для вычисления зазоров между рабочими поверхностями роликов и колец обратимся к Рис. 3. Радиусы-векторы на Рис. 3. помечают точки контакта:  $\rho_e$  – внешнего кольца;  $r_e$  – ролика с внешней дорожкой. Кроме того,  $u_e, u_r$  – векторы перемещений узлов внешнего кольца и ролика;  $\vartheta_e, \vartheta_r$  – углы поворотов. Векторы

исходного (Рис. 3, а) и актуального (Рис. 3, б) положений связываются между собой формулой кинематики плоского движения:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cos \vartheta + \mathbf{k} \times \mathbf{a} \sin \vartheta + \mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$  – радиусы-векторы в исходном и актуальном положениях;  $\vartheta$  – угол поворота;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{k}$  – единичная нормаль к плоскости движения.

Величины зазоров (поджатий) между роликом и внешним кольцом находились как проекции векторов, связывающих точки контактирующих поверхностей, на нормали к этим поверхностям:

$$\delta^e = \delta_0^e + (\mathbf{r}'_e - \mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e + \mathbf{r}_e) \cdot \mathbf{n}_e,$$

где  $\delta_0^e$  – исходный зазор;  $\mathbf{n}_e$  – нормали к поверхностям в точках контакта; штрихом помечены радиусы-векторы актуального состояния, вычисленные по формуле (3).

Аналогично можно определить величины зазоров (поджатий) между роликом и внутренним кольцом.

Энергия деформации ролика, вызванная контактом боковых поверхностей ролика и дорожек качения колец (линейным контактом), получается интегрированием  $q_k$  из формулы (1) по перемещению и суммированием энергий всех дисков, а энергия деформации от торцевых точечных контактов получается интегрированием правой части формулы (2) по перемещению и последующим суммированием по всем бортикам:

$$U_e = 0,168 \sum_{k=1}^N E_s L^2 \Delta s_k \left( \frac{|\delta_k^e|}{L} \right)^{19/9}, \quad U_i = 0,168 \sum_{k=1}^N E_s L^2 \Delta s_k \left( \frac{|\delta_k^i|}{L} \right)^{19/9}, \quad (\delta_k^e, \delta_k^i < 0),$$

$$U_{flang} = \frac{2}{5} \sum_{m=1}^4 c_f E_s R^3 \left( \frac{|\delta_m^{flang}|}{R} \right)^{5/2}, \quad (\delta_m^{flang} < 0),$$

где  $U_e$ ,  $U_i$  и  $U_{flang}$  – энергии деформации ролика, вызванные контактом с внешним, внутренним кольцами и с бортиками;  $N$  – количество дисков, на которые разбит ролик;  $m$  – номер торцевой контактной точки;  $c_f$  – константа из (2) (принимается нулевой, если  $m$ -й бортик конструкцией подшипника не предусмотрен).

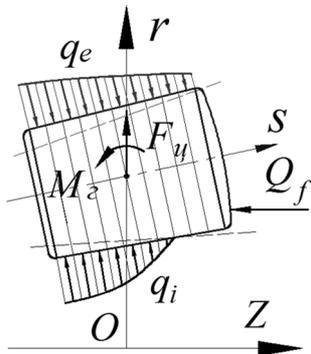
Матрица жёсткости и вектор сил ролика находились дифференцированием полной энергии деформации ролика по его перемещениям:

$$P_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \quad K_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}, \quad U = U_e + U_i + U_{flang}, \quad (4)$$

где  $P_\alpha$  и  $K_{\alpha\beta}$  – компоненты вектора сил и матрицы жесткости;  $y_\alpha$ ,  $y_\beta$  – обобщенные перемещения ролика;  $\alpha$ ,  $\beta$  – номера обобщенных перемещений ( $\alpha=1, \dots, 3$ ;  $\beta=1, \dots, 3$ );  $U$  – полная энергия ролика с учетом местных деформаций колец.

Ролик, нагруженный упругими контактными нагрузками со стороны колец, а также инерционными нагрузками, должен находиться в равновесии (Рис. 4). Задача поиска равновесного положения ролика приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений, которую предлагается решать квазиньютоновским методом – BFGS в сочетании с критерием линейного поиска Armijo.

При вычислении полной энергии ролика все величины рассматриваются как функции положения ролика  $\mathbf{y}=(u, v, \vartheta)^T$  (Рис. 1), что согласно (4) дает суммарный вектор сил  $\mathbf{P}(\mathbf{y})$  (две силы и момент), действующих на ролик со стороны колец. Система уравнений равновесия ролика, определённая с помощью энергетического подхода, имеет следующий вид:



$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) + \mathbf{F} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial(U_e + U_i + U_{flang})}{\partial u} = 0 \\ F_y - \frac{\partial(U_e + U_i + U_{flang})}{\partial v} = 0, \\ M_z - \frac{\partial(U_e + U_i + U_{flang})}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Рис. 4. Нагрузки на ролик

где  $\mathbf{F}$  – вектор инерционных нагрузок ( $F_y$  – центробежная сила и  $M_z$  – гироскопический момент).

Тогда положение равновесия ролика определяется решением системы уравнений (5) с помощью итераций. Согласно квазиньютоновскому методу в процессе итераций матрицу Гессе можно заменить приближенной матрицей  $[\mathbf{B}]$ , то есть

$$\Delta \mathbf{y} = [\mathbf{B}]^{-1} (\mathbf{P} + \mathbf{F}). \quad (6)$$

При учете критерия линейного поиска Агмїїо невязка  $\Delta \mathbf{y}$  в уравнении (6) последовательно уменьшается итерациями, в процессе которых модифицируется матрица  $[\mathbf{B}]^{-1}$ :

$$[\mathbf{B}_{k+1}]^{-1} = \left( [\mathbf{E}] - \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{h}_k^T}{\mathbf{h}_k^T \mathbf{s}_k} \right) [\mathbf{B}_k]^{-1} \left( [\mathbf{E}] - \frac{\mathbf{h}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{h}_k^T \mathbf{s}_k} \right) + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{h}_k^T \mathbf{s}_k},$$

где  $\mathbf{s}_k$  – разность перемещений;  $\mathbf{h}_k$  – разность градиентов;  $k$  – номер итерации;  $[\mathbf{E}]$  – единичная матрица.

Найденное положение равновесия каждого ролика позволяет по формулам аналогичным (4) определить вектор сил и матрицу жесткости для полной системы, состоящей из двух колец и всех роликов. Но, так как ролики играют роль промежуточных упругих элементов, то их степени свободы целесообразно исключить из расчета с помощью процедуры конденсации. В результате конденсации в каждой рабочей плоскости подшипника были найдены вектор  $\mathbf{P}^*$  размерности  $6 \times 1$  и матрица  $[\mathbf{K}^*]$  размерности  $6 \times 6$ , относящиеся только к кольцам подшипника в локальной системе координат. Переход из рабочей плоскости в глобальную систему координат выполнялся с помощью матрицы перехода. Вектор сил  $\mathbf{P}_{glob}$  и матрица жесткости  $[\mathbf{K}_{glob}]$  для расчета всего подшипника находились в глобальной системе координат с последующим суммированием по всем роликам:

$$\mathbf{P}_{glob} = \sum_{l=1}^{n_{roll}} [\mathbf{L}(\varphi_l)]^T \mathbf{P}_l^*, \quad [\mathbf{K}_{glob}] = \sum_{l=1}^{n_{roll}} [\mathbf{L}(\varphi_l)]^T [\mathbf{K}_l^*] [\mathbf{L}(\varphi_l)],$$

где  $[\mathbf{L}(\varphi)]$  – матрица перехода;  $n_{roll}$  – количество роликов;  $\varphi$  – угол ролика (Рис.1).

В третьей главе ЭМРП была использована для исследования упругих свойств роликовых подшипников различной конструкции.

Сначала были исследованы упругие реакции и жесткости цилиндрического роликового подшипника. В качестве объекта исследования использован цилиндрический подшипник с прямыми кольцевыми дорожками, 12-ю частично профилированными роликами со сферическими торцевыми поверхностями и четырьмя бортиками.

Этот подшипник был исследован в работе de Mul, в которой кроме теоретических расчетов представлены также результаты экспериментов по определению нелинейных зависимостей перемещений кольца роликового подшипника от действия радиальной силы и поперечного момента. В экспериментах всего были выполнены три набора измерений зависимости вертикального перемещения  $|u_y|$  и угла поворота  $\gamma_x$  от радиальной силы  $|P_y|$ , каждый с различным начальным моментом  $M_0$ : 4440 Н·мм, 0 Н·мм и -8530 Н·мм. Для верификации разработанных алгоритмов была создана численная реализация того же подшипника и рассмотрены те же виды нагрузок, что и в экспериментах de Mul. Сравнение результатов, полученных с помощью ЭМРП, с расчетами и экспериментальными данными de Mul показано на Рис. 5.

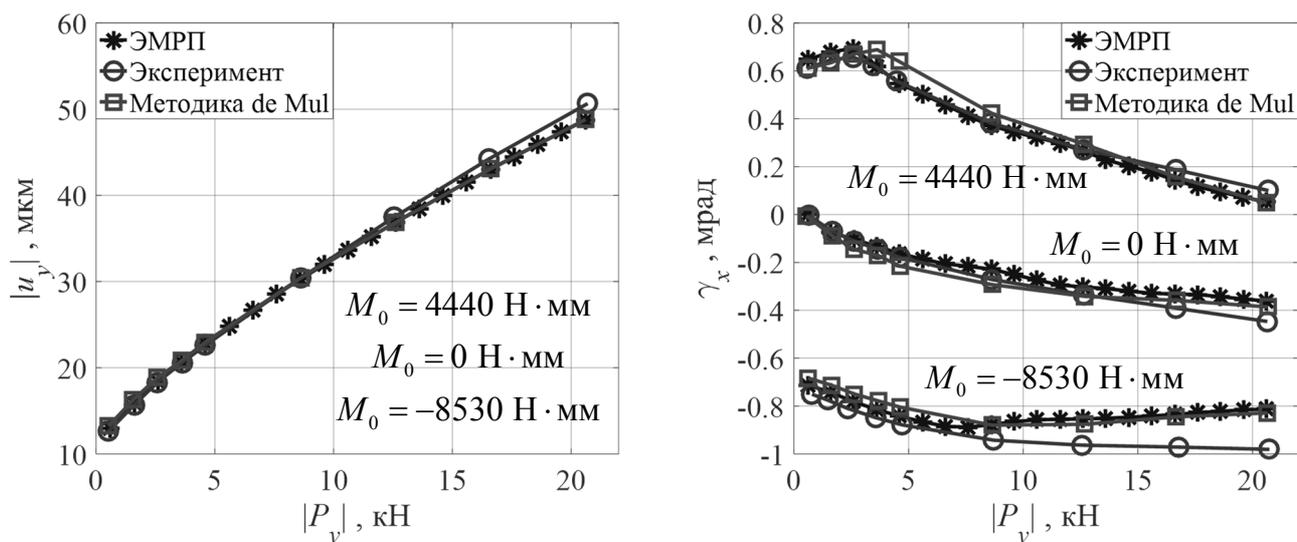


Рис. 5. Сравнение результатов

Далее были рассчитаны упругие перемещения и жесткости конического подшипника при нагружении радиальной силой и поперечным моментом. Рассматривался подшипник 30208А – роликовый радиально-упорный однорядный с короткими коническими роликами, безбортовым внешним кольцом и двухбортовым внутренним кольцом. Учитывались центробежная сила и гироскопический момент. Внешнее кольцо подшипника было закреплено в пространстве, а внутреннее кольцо вращалось вокруг своей оси с частотой  $n$  (об/мин).

На основе ЭМРП была создана численная реализация рассматриваемого подшипника. Задавались следующие исходные данные: нагрузки, действующие на подшипник:  $P_y = 10000$  Н,  $P_z = 45000$  Н,  $M_x = 79000$  Н·мм; частота вращения внутреннего кольца  $n$  варьировалась от 5000 до 25000 об/мин.

Эта же задача рассматривалась в работе Tong, в которой не только представлены результаты Tong расчета упругих свойств подшипника типа 30208А, но и результаты численных расчетов специалистами известной подшипниковой компании Германии – FAG. Эти вспомогательные результаты с целью верификации показаны на Рис. 6.

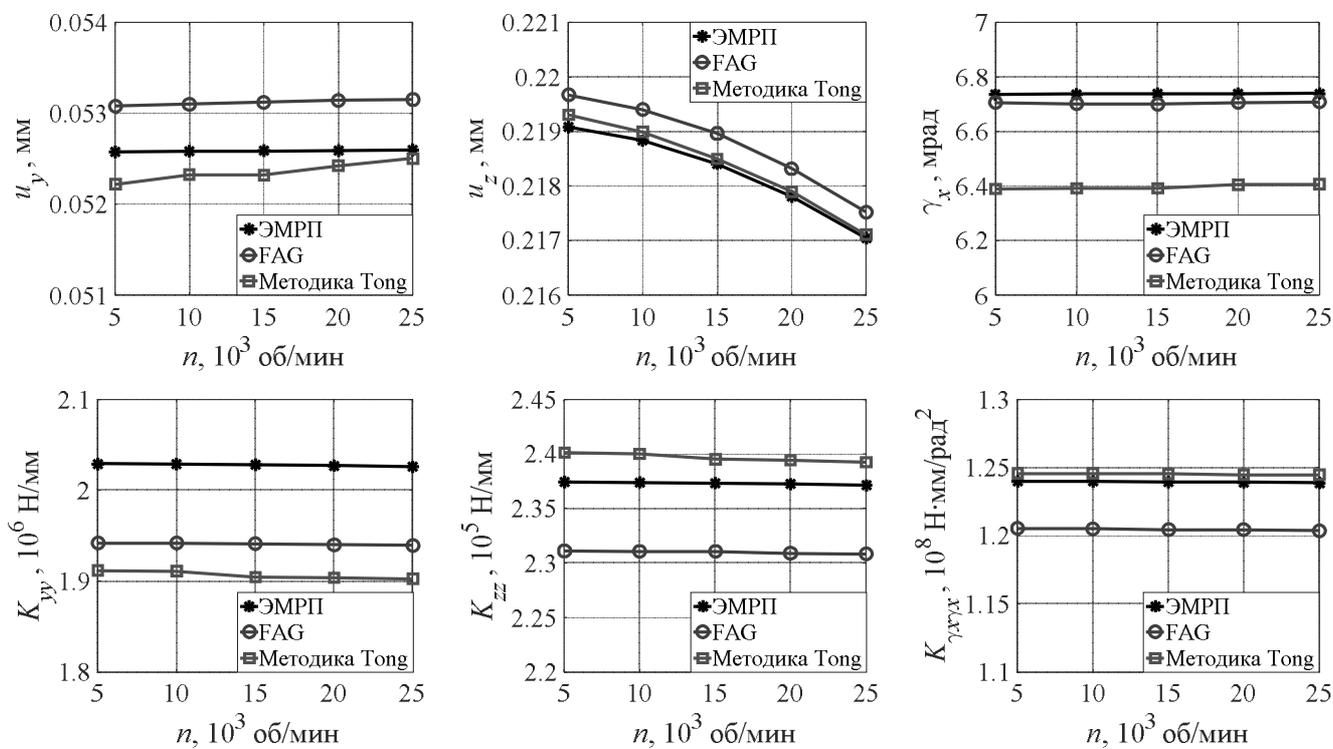
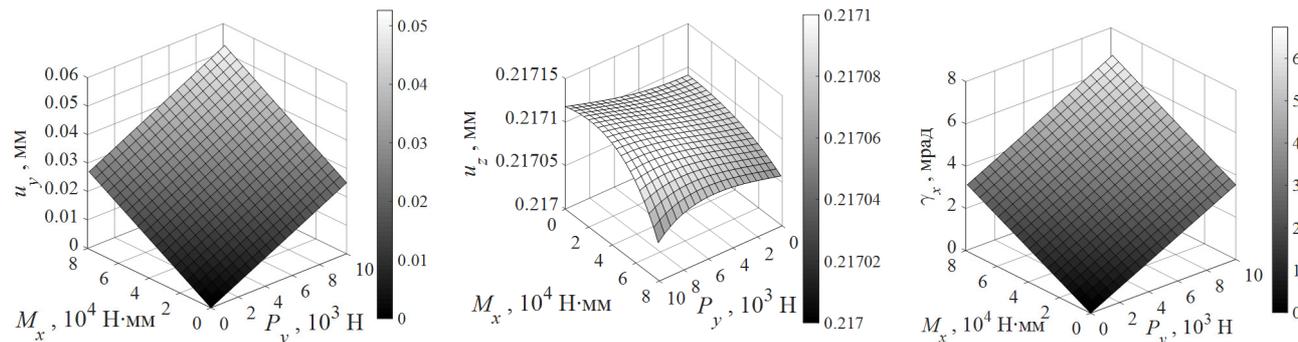


Рис. 6. Упругие свойства подшипника при разных частотах вращения

Прежде всего отметим, что как видно из Рис. 6, разработанная ЭМРП дает результаты, которые весьма хорошо подтверждаются как по методике FAG, так и согласуются с существующей альтернативной численной методикой Tong (погрешность для перемещений и углов поворота не более чем 1,5%, а для компонентов матриц жесткости не более чем 5%). Кроме того, из графиков следует, что с увеличением частоты вращения  $n$  с 5000 до 25000 об/мин перемещение  $u_y$  и угол поворота  $\gamma_x$  незначительно увеличиваются на 0,04% и 0,06%, а перемещение  $\delta_z$  уменьшается на 1%, и все компоненты матриц жесткости незначительно уменьшаются. Таким образом, при данных условиях центробежная сила и гироскопический момент почти не влияют на упругие свойства подшипника.

Упругие перемещения и компоненты матрицы жесткости подшипника 30208А для частоты вращения  $n=25000$  об/мин показаны на Рис. 7.



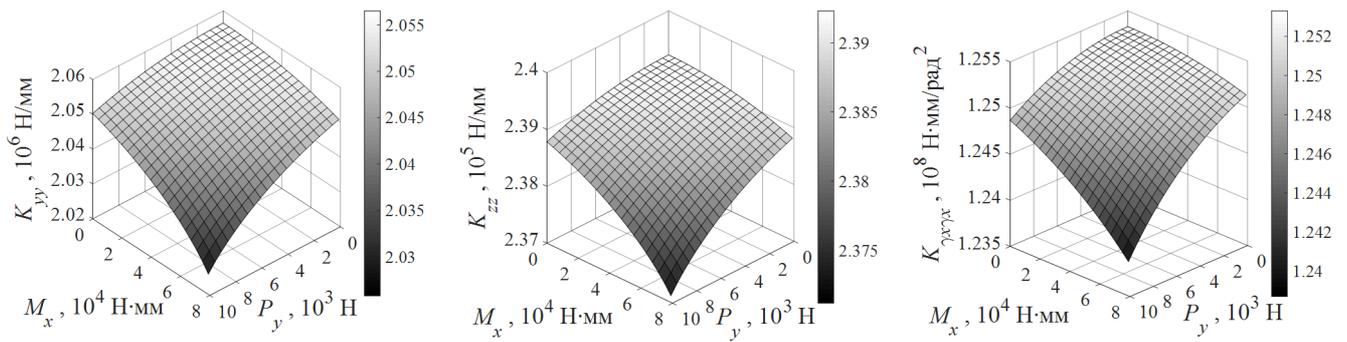
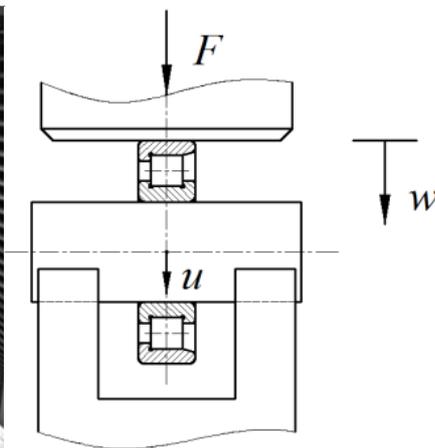


Рис. 7. Перемещения и жесткости, рассчитанные с учетом инерционной нагрузки  
**В четвертой главе** с целью верификации ЭМРП выполнялся натурный эксперимент на универсальной испытательной машине (ИМ), предназначенной для испытаний образцов и элементов конструкций на растяжение и сжатие. Объектом исследования являлся радиальный роликовый подшипник 12309КМ с короткими цилиндрическими роликами, однорядный, с однобортовым наружным кольцом и двухбортовым внутренним кольцом.

Экспериментальное исследование было выполнено в два этапа:



На первом этапе роликовый подшипник нагружался локальной сжимающей нагрузкой, действующей на наружное кольцо (Рис. 8). Внутреннее кольцо фиксировалось на жесткой штанге. Штангой являлся стальной цилиндр, плотно входящий во внутреннее кольцо подшипника. Штанга

Рис. 8. Схема экспериментального исследования подшипника. Штанга опиралась на стальную вилку. Плотный контакт штанги и внутреннего кольца обеспечивал отсутствие его изгиба. Устройство фиксации наружного кольца отсутствовало, то есть изгиб наружного кольца не был исключен.

В эксперименте с помощью ИМ перемещение  $w$  и нагрузка  $F$  на торце траверсы через электромеханический преобразователь записывались в базу данных и далее представлялись в виде графиков. При действии вертикальной нагрузки на подшипник возникало радиальное перемещение  $u$ . Очевидно, что перемещение верхнего захвата ИМ  $w$  и радиальное перемещение внутреннего кольца  $u$  равны:  $w = u$ .

Полученные экспериментальные графики обрабатывались методом наименьших квадратов (МНК) с целью их аппроксимации аналитическими соотношениями:

$$\frac{w}{w_0} = 0,0777 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{0,8885} - 0,0384 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{0,9187}, \quad (7)$$

где  $w_0 = 1$  мкм и  $F_0 = 1$  Н.

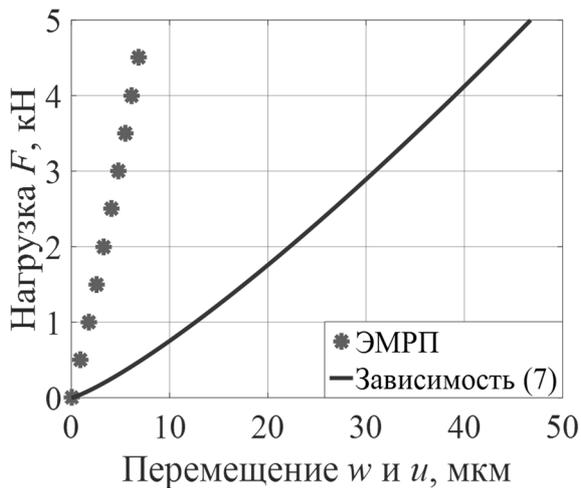


Рис. 9. Сопоставление результатов

В рамках ЭМРП была создана численная реализация того же подшипника типа 12309КМ и реализованы те же виды нагрузок, что и в описанных выше экспериментах. Полученные результаты расчетов представлены в виде графика совместно с экспериментальными данными на Рис. 9. Очевидно, что результаты не совпадают.

С использованием тензорезистора, приклеенного на поверхности внешнего кольца подшипника рядом с местом приложения нагрузки был обнаружен изгиб

внешнего кольца. Численная реализация того же эксперимента, выполненная в комплексе ANSYS также подтвердила наличие изгиба кольца, при этом результаты эксперимента и МКЭ совпали (как перемещения, так и деформации).

Из анализа первого этапа эксперимента был сделан вывод о том, что при отсутствии специальных устройств, обеспечивающих отсутствие изгиба колец, податливость колец существенно влияет на упругую характеристику подшипника.

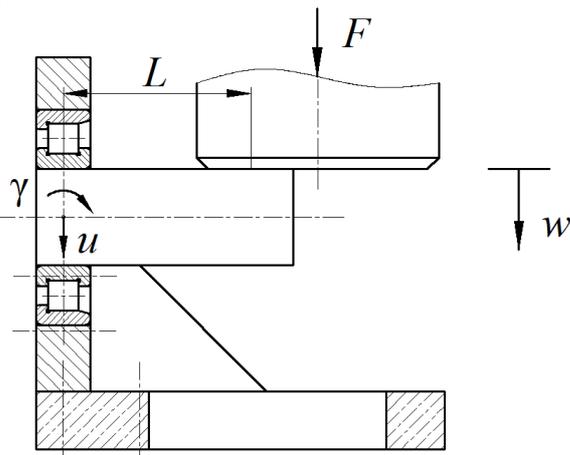
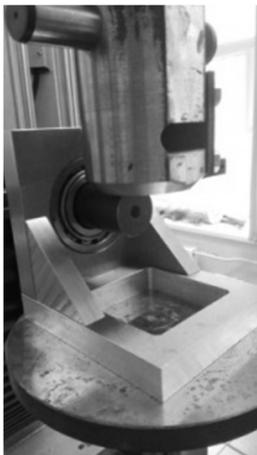


Рис. 10. Схема экспериментального исследования

и нагружении подшипника, предварительно оценивались расчетом с помощью МКЭ, при этом было показано, что использование устройства фиксации практически не влияет на результаты эксперимента.

Нагрузка прикладывалась к краю штанги. Вследствие наличия плеча на внутреннее кольцо действовала вертикальная сила и поперечный момент. Величина поперечного момента  $M$  определялась через значение вертикальной силы  $F$  и её плечо  $L$ :  $M=FL$ . Нагрузка  $F$  варьировалась от 0 до 2 кН. Значение  $L$  было принято по результатам измерений.

При нагружении радиальной силой и поперечным моментом на внутреннем кольце возникали радиальное перемещение  $u$  и поперечный угол поворота  $\gamma$  (Рис. 10). Очевидно, что между перемещением верхнего захвата ИМ  $w$ , радиальным перемещением подшипника  $u$  и поперечным углом поворота  $\gamma$  выполняется соотношение:  $w = u + \gamma L$ .

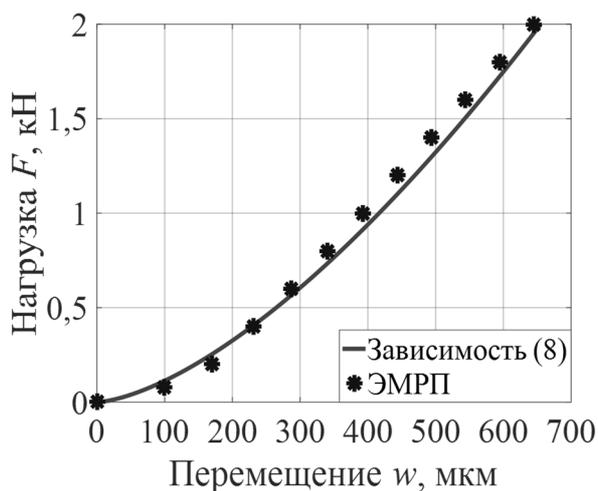


Рис. 11. Сопоставление результатов

полученных ЭМРП и экспериментом. Как видно из графиков, ЭМРП дает результаты, которые весьма хорошо подтверждаются натурным экспериментом.

В пятой главе построенная ЭМРП применялась непосредственно в имитационной задаче роторной динамики летательных аппаратов. С целью имитирования конструкции турбовентиляторных двигателей (ТВРД) (Рис. 12, а), широко используемых на пассажирских самолетах, имитационная система была составлена из массивного жесткого ротора, опирающегося на два роликовых подшипника, установленных на подвижном основании (Рис. 12, б).

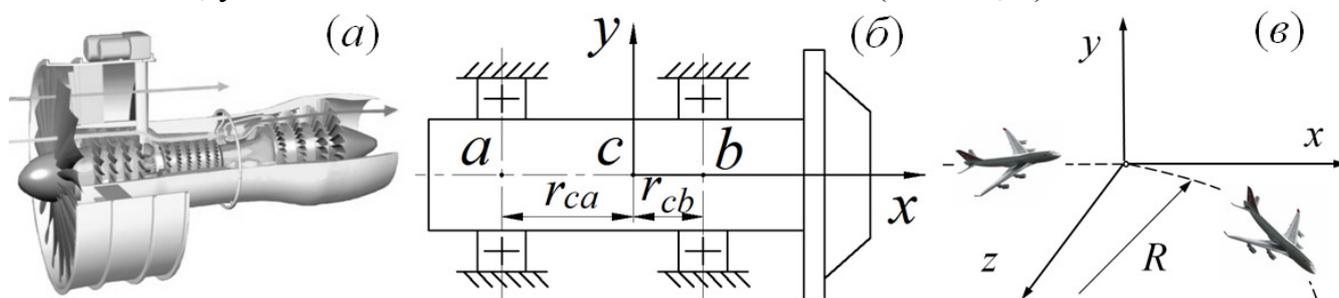


Рис. 12. Ротор с подшипниками и режимы движения самолета

В имитационной задаче исследовались переходные процессы, возникающие в системе при движении основания на вираже (Рис. 12, в). В обоих состояниях самолет имеет постоянный модуль скорости  $v_0$ , при поступательном движении самолет летит вдоль оси  $x$ , а при вращательном движении самолет движется по круговой траектории с радиусом  $R$ .

Рассмотрим конструкцию ротора с подшипниками. Для некоторого приближения имитации к реальности в ней использован авиационный однорядный радиальный роликовый подшипник 55-1002919Р2 с короткими цилиндрическими роликами, с двумя бортами на внутреннем кольце и без бортов на наружном кольце. Стандарт подшипника – ТУ 3900А.

Для описания больших поворотов в данной работе использован вектор Эйлера. Векторное описание поворотов основано на теореме Эйлера о том, что произвольная комбинация пространственных поворотов эквивалентна одному плоскому повороту. Вектор Эйлера как раз и задаёт этот плоский поворот. Его

Как и на первом этапе экспериментальные графики были предварительно обработаны, то есть с использованием МНК получены гладкие зависимости перемещения траверсы ИМ  $w$  от нагрузки  $F$ :

$$\frac{w}{w_0} = 4,8999 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{0,6642} - 0,4163 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{0,7315}, \quad (8)$$

где  $w_0 = 1$  мкм и  $F_0 = 1$  Н.

С использованием ЭМРП были получены вертикальное перемещение  $u$  и поперечный угол поворота  $\gamma$  внутреннего кольца подшипника.

направление указывает ось поворота, а длина равна углу поворота (Рис. 13).

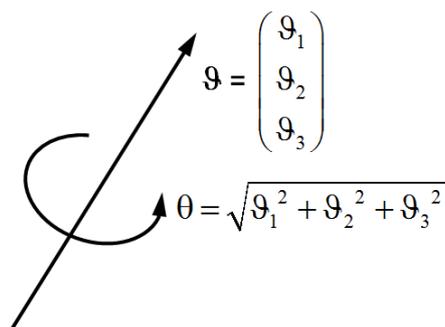


Рис. 13. Вектор Эйлера

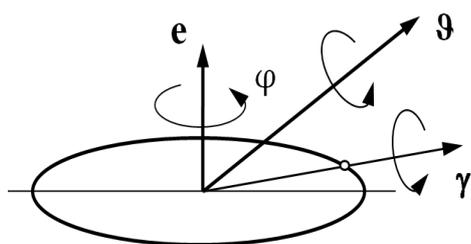


Рис. 14. Разделение поворота

Спецификой задач роторной динамики машин, состоящих из валов, зубчатых передач, подшипников и других вращающихся элементов, является ограничение величины поперечного поворота. В связи с этим нет необходимости использовать вектор Эйлера для полного поворота, так как норма этого вектора ограничена величиной  $2\pi$ . Вектором Эйлера достаточно описать только поперечный поворот. Тогда для поворота вокруг фиксированной продольной оси будут действовать обычные правила кинематики плоского движения из теоретической механики. Поэтому полный поворот с вектором Эйлера  $\mathfrak{g}$  удобно представить как комбинацию двух последовательных поворотов – первый поворот вокруг оси ротора  $e$  на угол  $\varphi$ , второй поворот вокруг оси, перпендикулярной оси ротора, с вектором Эйлера  $\gamma$  (Рис. 14).

С помощью разработанного метода описания больших поворотов композицией продольного и поперечного поворотов для обоих вариантов движения самолета система дифференциальных уравнений движения ротора в глобальной системе координат была представлена в следующем виде:

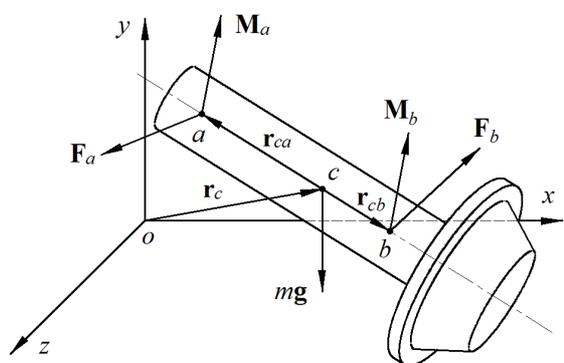


Рис. 15. Силовые элементы на ротор

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_\varphi \\ \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{B}_\gamma^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \mathbf{L}_\gamma \cdot \omega_\varphi \mathbf{e}) \\ \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_v}{m} + \mathbf{g} \\ \frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \mathbf{r}_{ca} \times \mathbf{F}_a + \mathbf{r}_{cb} \times \mathbf{F}_b + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_v \end{array} \right. ,$$

где  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор центра масс ротора;  $\mathbf{v}_c$  – вектор скорости центра масс ротора;  $\mathbf{K}_c$  – вектор кинетического момента;  $\mathbf{r}_{ca}, \mathbf{r}_{cb}$  – радиусы-векторы между точками;  $\mathbf{F}_{a,b}, \mathbf{M}_{a,b}$  – векторы сил и моментов, возникающие в роликовых подшипниках, приложенные в точках  $a$  и  $b$ ;  $\mathbf{F}_v, \mathbf{M}_v$  – векторы силы и момента демпфирования.

В качестве примера решение данной имитационной задачи роторной динамики проводилось для следующих исходных данных:

- постоянный модуль скорости самолета  $v_0 = 250$  м/с;
- радиус криволинейного участка траектории самолета  $R = 2500$  м;
- масса ротора  $m = 658$  кг;
- длины радиусов-векторов  $r_{ca} = 0,456$  м и  $r_{cb} = 0,144$  м;

- начальная угловая скорость ротора  $\omega_0 = 2$  рад/с.

Результаты решения представлены в виде графиков сил и моментов (Рис. 16):

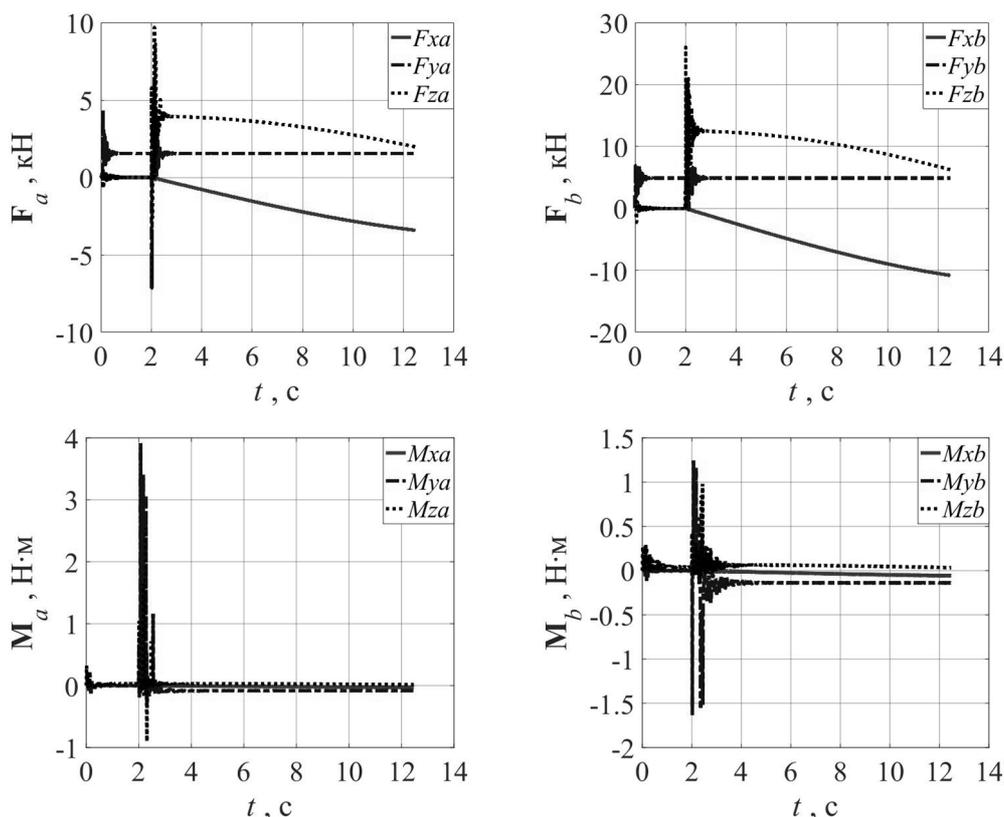


Рис. 16. Силы и моменты в подшипниках

Из графиков (Рис. 16) можно заметить, что в начале каждого режима движения по прямой ( $t = 0 \dots 2$  с) и по дуге ( $t = 2 \dots 13$  с) наблюдаются переходные процессы, но вследствие наличия демпфирования через несколько долей секунды колебания затухают. Кроме найденных силовых факторов с использованием ЭМРП ещё удалось определить распределение контактных напряжений. В имитационной задаче получено распределение нормальных напряжений на поверхности роликов в тот момент, когда силовые факторы достигают максимальных значений (Рис. 17). Для подшипника *a*, максимальная нагрузка достигается при  $t=2,12$  с, а для подшипника *b* при  $t = 2,01$  с.

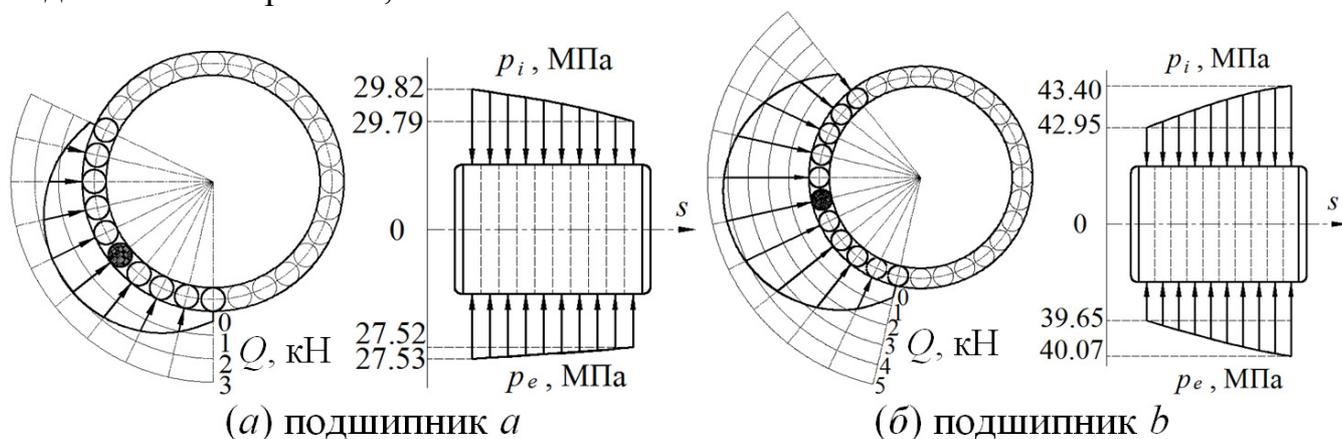


Рис. 17. Распределение нагрузки по роликам и контактные напряжения

### **Основные результаты и выводы**

1. В диссертации разработана новая рациональная методика расчета упругих реакций и жесткостей для роликовых подшипников, основанная на энергетическом подходе. Отличительной особенностью предложенной ЭМРП является хорошее быстроедействие и высокая точность, что является решающим фактором для её применения в задачах роторной динамики. Разработанные алгоритмы применимы для роликовых подшипников любого вида, за исключением сферических.
2. С использованием ЭМРП исследованы упругие свойства роликовых подшипников различной конструкции, в том числе, с учетом инерционных нагрузок.
3. Сопоставление численных результатов, полученных на основе ЭМРП, с аналогичными результатами других авторов, а также с результатами, полученными МКЭ, показало, что разработанная методика позволяет получить высокую точность моделирования.
4. ЭМРП продемонстрировала хорошее соответствие с результатами натуральных экспериментов в случае отсутствия изгиба колец подшипника, который был исключен специально сконструированным устройством фиксации подшипника.
5. Надежность разработанной методики была продемонстрирована решением имитационной задачи, в которой режим движения ротора резко меняется (боковой удар). Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии численных проблем в ЭМРП.
6. На основе ЭМРП и разработанного в диссертации приёма кинематически точного разделения большого поворота на продольный и поперечный могут быть построены решения других практически важных задач роторной динамики с участием жестких роторов и роликовых подшипников.
7. Результаты диссертации внедрены в учебный процесс кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э. Баумана и в расчетную практику научно-технического центра роторной динамики «Альфа-транзит».

### **Список публикации по теме диссертации**

1. Сорокин Ф.Д., Чжан Х., Иванников В.В. Разработка энергетической модели роликового подшипника // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 3. С. 14-23. (0,63 п.л./0,3 п.л.)
2. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Анализ контактного взаимодействия цилиндрического ролика с кольцами подшипника на основании конечно-элементного моделирования // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 11. С. 4-13. (0,63 п.л./0,3 п.л.)
3. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Кинематически точное разделение большого поворота на осевой и поперечный в задачах роторной динамики // Инженерный журнал: наука и инновации. ЭЛ № ФС 77-53688. 2018. Вып. 10. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-10-1815> (дата обращения 14.02.2019 г.). (0,88 п.л./0,44 п.л.)
4. Экспериментальная верификация энергетической модели роликового

- подшипника для моделирования опорных узлов авиационных двигателей. Часть 1. Нагружение подшипника радиальной силой и поперечным моментом на специальном стенде, предотвращающем изгиб колец / Х. Чжан [и др.] // Труды МАИ. Эл № ФС 77-69492. 2018. №. 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100582> (дата обращения 14.02.2019 г.). (1,13 п.л./0,56 п.л.)
5. Sorokin F.D., Zhang H. A method for describing large rotations with a combination of axial and transverse Euler vectors // *Vibroengineering PROCEDIA*. 2018. Vol. 18. P. 201-206. (0,38 п.л./0,19 п.л.)
  6. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Расчет относительных перемещений колец конического подшипника с учетом инерционных сил и гироскопических моментов // *Автомобиль. Дорога. Инфраструктура*. 2018. № 2(16). URL: <https://www.adi-madi.ru/madi/article/view/559> (дата обращения 14.02.2019 г.). (0,69 п.л./0,34 п.л.)
  7. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Сопоставительный анализ различных соотношений, применяемых при расчете контактной жесткости в роликовом подшипнике // XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов: сборник трудов конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2017. С. 127-129. (0,19 п.л./0,1 п.л.)
  8. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Использование уравнений динамики для определения равновесного положения ролика между кольцами подшипника // IV Международная школа-конференция молодых учёных «Нелинейная динамика машин» School-NDM: сборник трудов. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2017. С. 406-412. (0,44 п.л./0,22 п.л.)
  9. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Расчет матрицы жесткости роликового подшипника на основе энергетического подхода // II всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике»: сборник трудов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 228–232. (0,31 п.л./0,16 п.л.)
  10. Чжан Х., Сорокин Ф.Д. Применение квазиньютоновского метода в энергетической модели конического подшипника // XXIX Международная конференция «Машиноведение и инновации. Конференция молодых ученых и студентов»: материалы конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2018. С. 181-184. (0,25 п.л./0,12 п.л.)
  11. Сорокин Ф.Д., Чжан Х. О рациональном способе описания больших поворотов в задачах роторной динамики машин комбинацией продольного и поперечного векторов // Проблемы механики современных машин: материалы VII международной научной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2018. Т. 1. С. 309-312. (0,25 п.л./0,12 п.л.)
  12. Чжан Х., Сорокин Ф.Д. Исследование динамики массивного ротора с использованием энергетической модели роликового подшипника // Одиннадцатая Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов «Будущее машиностроения России»: сборник докладов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. С. 706-709. (0,25 п.л./0,12 п.л.)