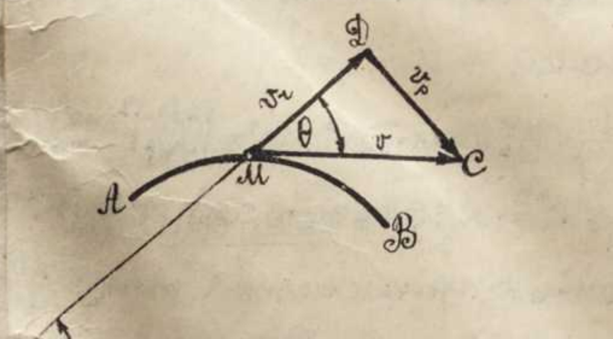
Аналитическая механика

1я часть.

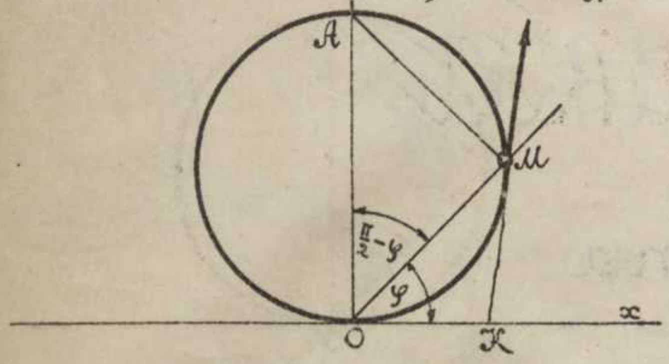
Упражненіе I

1 Точка, положеніе которой опредѣляется полярными координатами r и φ, обладаетъ постоянной скоростью $4\frac{mt}{sec}$. Въ начальный моментъ направленіе этой скорости образуетъ съ рад.-векторомъ уголъ $=0$, а затѣмъ возрастающій пропорціонально времени на $\frac{\pi}{6}$ въ секунду. Найти видъ траекторіи, если считать, что при $t=0$ и $r_0=0$ и $\varphi_0=0$.



Рѣш. Если въ моментъ времени t скорость точки будетъ $MC = v = 4\frac{mt}{sec}$, то, какъ извѣстно изъ Аналит. мех., проекціи этой скорости на радіусъ векторъ и на нормаль къ нему выразятся такъ: $v_r = 4\cos\theta = \frac{dr}{dt}$; и $v_p = 4\sin\theta = r\frac{d\varphi}{dt}$. Но θ есть уголъ между скоростью и рад.-векторомъ, а потому, по условію задачи: $\theta = \frac{\pi}{6}\cdot t$. Слѣдоват., 1) $\frac{dr}{dt} = 4\cos\frac{\pi}{6}t$ и 2) $r\frac{d\varphi}{dt} = 4\sin\frac{\pi}{6}t$. Изъ 1го ур. находимъ: $r = \int 4\cos\frac{\pi}{6}t\,dt = \frac{24}{\pi}\sin\frac{\pi}{6}t + C$. При $t=0$ и $r=r_0=0$, слѣд., $C=0$, а потому $r = \frac{24}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{6}t$ (I). Подставивъ это выраженіе во 2е ур., получимъ: $\frac{24}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{6}t\cdot\frac{d\varphi}{dt} = 4\sin\frac{\pi}{6}t$; $\frac{d\varphi}{dt} =$

$=\frac{\pi}{6}$; $\varphi=\int\frac{\pi}{6}dt=\frac{\pi}{6}t+C_1$; при $t=0$, $\varphi=\varphi_0=0$; слѣд., $C_1=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{6}t$. Подставив в рав. (I), получим: $r=\frac{24}{\pi}\cdot\sin\varphi$ – ур. траекторіи. Легко видѣть, что траекторія есть окружность, касательная к полярной оси и діаметр $OA=\frac{24}{\pi}$. Дѣйствительно, в точкѣ M имѣем:



$OM=OA.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=OA.\sin\varphi$, т.е. $r=\frac{24}{\pi}\sin\varphi$.

№2. Точка описывает кривую: $r=2(1+\cos\varphi)$ [кардіоиду]. Угол φ выражается формулой: $\varphi=3t$. Какова скорость точки в тот момент, когда разстояніе от полюса $=1$. <u>Отв.</u> $v=6$.

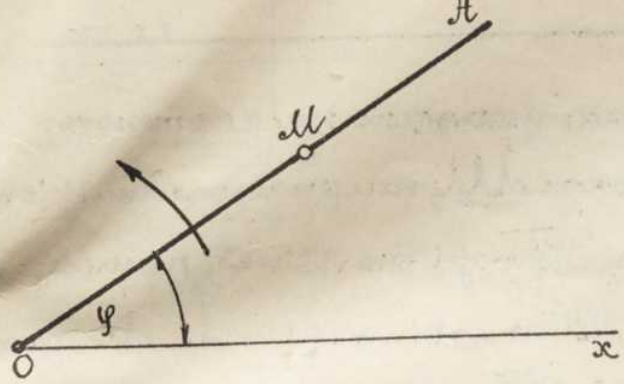
<u>Рѣш.</u> Имѣем: $v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$; но $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, гдѣ $\frac{dr}{d\varphi}=-2\sin\varphi$, $\frac{d\varphi}{dt}=3$; слѣд., $v^2=(-2\sin\varphi)^2\cdot3^2+4.(1+\cos\varphi)^2\cdot3^2=36(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1+2\cos\varphi)=$ $=72(1+\cos\varphi)$; $v=\sqrt{72(1+\cos\varphi)}=6\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$. Когда $r=1$, имѣем: $1=$ $=2(1+\cos\varphi_1)$; слѣд., в этот момент $v=v_1=6\sqrt{1}=6$.

№3. Точка движется по логарифмической спирали: $r=ae^{k\varphi}$ таким образом, что секторальная скорость ея постоянна и $=\frac{c}{2}$. Показать, что скорость точки обратно пропорціональна ея разстоянію от полюса спирали.

<u>Рѣш.</u> $v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$; но $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$; слѣдов., $v^2=\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Из ур. спирали находим: $\frac{dr}{d\varphi}=k.a.e^{k\varphi}=kr$, а потому $v^2=[k^2r^2+$ $+r^2]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ (I). Секторальная скорость выражается так: $\frac{d\sigma}{dt}=$ $=\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}$; но $\frac{d\sigma}{dt}=\frac{c}{2}$, слѣдов., $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{2}$; $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{r^2}$. Подставив в рав. (I), получим: $v^2=(k^2r^2+r^2)\cdot\frac{c^2}{r^4}=\frac{(k^2+1).c^2}{r^2}$; $v=\frac{c\sqrt{k^2+1}}{r}$; так как выраженіе $c\sqrt{k^2+1}$ – постоянная величина, то v обратно пропорціонально рад.-вектору r.

№4. Прямая OA вращается около неподвижной точки O таким образом, что секторальная скорость точки M, движущейся по прямой OA по закону $OM=r=r_0+at$, остается равной $\frac{c}{2}$. Найти вид траекторіи точки.

Рѣш. Примем за полярную ось то положеніе прямой OA, которое она занимала при $t=0$. По условію, секторальная скорость $=\frac{c}{2}$, т.е. $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{2}$ или же: $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{r^2}$. Из равенства $r=r_0+at$ находим: $\frac{dr}{dt}=a$; раздѣлив, получим: $\frac{dr}{dt}:\frac{d\varphi}{dt}=a:\frac{c}{r^2}$ или $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{a}{c}\cdot r^2$. Раздѣляем перемѣнныя: $\frac{dr}{r^2}=\frac{a}{c}d\varphi$; откуда $\int\frac{dr}{r^2}=\int\frac{a}{c}d\varphi$, т.е.



$-\frac{1}{r}+C_1=\frac{a}{c}\varphi$, гдѣ C_1 – произвольное постоянное. При $\varphi=0$, $t=0$ и $r=r_0$, а потому имѣем: $-\frac{1}{r_0}+C_1=0$ и $C_1=\frac{1}{r_0}$ и ур. траекторіи примет вид:

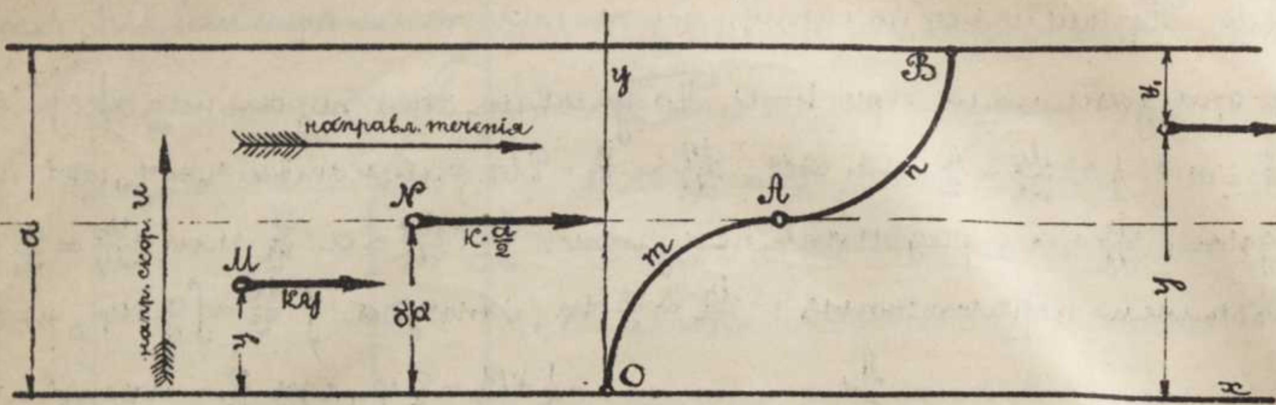
$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}=\frac{a}{c}\varphi.$$

№5. По какому закону мѣняется скорость точки, движущейся по эллипсу: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и обладающей постоянной секторальной скоростью $\frac{c}{2}$, в зависимости от положенія точки.

Отв. $v^2=c^2\left(\frac{x^2}{16}+y^2\right)$.

Рѣш. Имѣем: $v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$. Секторальная скорость в декартовых координатах выражается так: $\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$. По условію, $\frac{d\sigma}{dt}=\frac{c}{2}$, слѣдов., имѣем ур.: $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c$ (I). Дифференцируя ур. эллипса, получим: $\frac{2x}{4}\cdot\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$, или же: $x\frac{dx}{dt}+4y\frac{dy}{dt}=0$ (II). Умножив ур. (I) на x, а ур. (II) на y и сложив их, получим: $(x^2+4y^2)\frac{dy}{dt}=cx$ (III). Но из ур. эллипса находим, что $x^2+4y^2=4$, слѣд., ур. (III) примет вид: $4\frac{dy}{dt}=cx$, $\frac{dy}{dt}=\frac{cx}{4}$. Тогда из ур. (II) найдем: $\frac{dx}{dt}=-\frac{4y}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$ или $\frac{dx}{dt}=-\frac{4y}{x}\cdot\frac{cx}{4}=-cy$. Подставив в выраж. для v^2, получим: $v^2=(-cy)^2+\left(\frac{cx}{4}\right)^2$, или же: $v^2=c^2\left(\frac{x^2}{16}+y^2\right)$.

№6. Пловец, могущій двигаться в спокойной водѣ со скоростью u, переплывает рѣку ширины a, скорость теченія которой измѣняется пропорціонально разстоянію от ближайшаго берега, будучи $=0$ у берегов и равной $\frac{ka}{2}$ на срединѣ рѣки. Какую кривую опишет пловец в абсолютном движенія. Отв. Параболу.



Рѣш. Расположим оси коорд., как указано на чертежѣ. Скорость теченія какой-ниб. точки M, на разстояніи y от берега, выразится так: $v = ky$. При $y=0$ и $v_0=0$, при $y=\frac{a}{2}$ (в серединѣ рѣки) и $v=k\cdot\frac{a}{2}$. Во 2й половинѣ рѣки скорость теченія будет: $v = ky_1 = k(a-y)$. В 1й половинѣ, слѣдов., имѣем: $\frac{dx}{dt}=ky$ и $\frac{dy}{dt}=u$. 2е ур. дает: $y=\int u\,dt = ut + C$. При $t=0$, $y=0$, слѣдов., $C=0$, т. е. $y=ut$ (I). Но тогда $\frac{dx}{dt}=ky=kut$; $x=\int kut\,dt = \frac{kut^2}{2}+C_1$. При $t=0$, $x=0$; слѣд., $C_1=0$ и $x=\frac{kut^2}{2}$ (II). Из ур. (I) находим: $t=\frac{y}{u}$; подставив во 2е, получим: $x=\frac{ku}{2}\cdot\frac{y^2}{u^2}$ или: $y^2 = 2\frac{u}{k}x$ — ур. параболы OmA. Координаты точки A будут: $y_1=\frac{a}{2}$ и $x_1=\frac{a^2k}{8u}$. В точкѣ A пловец будет через $t_1=\frac{a}{2u}$ секунд. Легко также составить ур. параболы AnB, при измѣненіи t от $t_1=\frac{a}{2u}$ до $t_2=2t_1=\frac{a}{u}$. Имѣем $\frac{dy}{dt}=u$; $y=ut+C_2$; при $t=t_1=\frac{a}{2u}$, $y=\frac{a}{2}$, откуда найдем, что $C_2=0$, т. е. $y=ut$ (III). Далѣе имѣем: $\frac{dx}{dt}=k(a-y)$ или: $\frac{dx}{dt}=k(a-ut)$; $x=-\frac{k(a-ut)^2}{2u}+C_3$. При $t=t_1=\frac{a}{2u}$, $x=x_1=\frac{a^2k}{8u}$ и мы найдем, что $C_3=\frac{ka^2}{4u}$, т. е. $x=-\frac{k(a-ut)^2}{2u}+\frac{ka^2}{4u}$ (IV). Исключая t из ур. (III) и (IV), получим: $x=\frac{ka^2}{4u}-\frac{k(a-y)^2}{2u}$ — ур. параболы AnB.

Упражненіе II

№ 1. Доказать, что если точка движется по поверхности шара, то проекція ея ускоренія на направленіе радіуса, проходя=

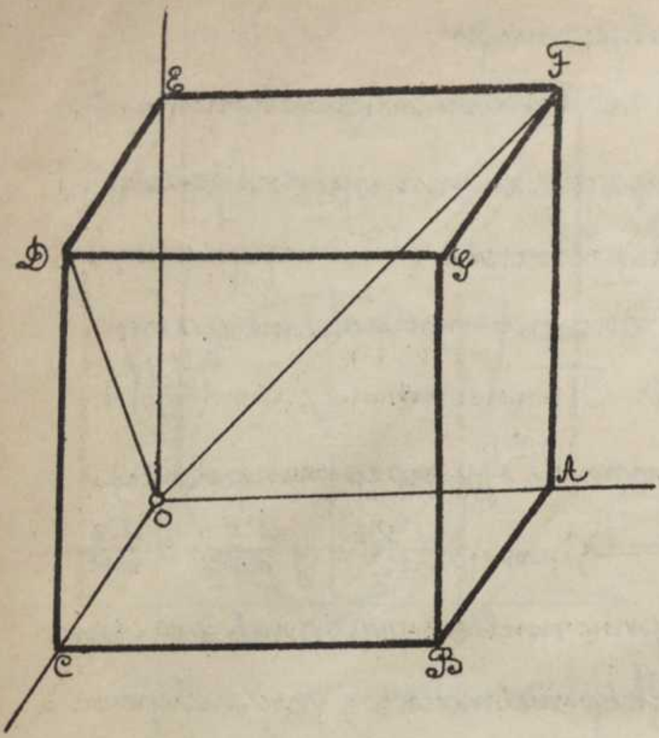
щаго через нее, равна $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус шара.

Рѣш. Возьмем ур. шара, считая цент его в началѣ координат. Ур. имѣет вид: $x^2+y^2+z^2=R^2$. Дифференцируем это ур. по времени t, считая x, y и z коорд-ми движущейся точки. 1е дифференцирование дает: $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$; 2е дифференцирование дает: $x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0$. Припоминая, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2$, найдем, что результат 2го дифференцирования примет вид: $x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+v^2=0$, или $x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-v^2$. Преобразуем это выражение, умножив и раздѣлив его лѣвую часть на Rj, гдѣ j есть полное ускореніе точки; мы получим тогда: $Rj\left(\frac{x}{R}\cdot\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{j}+\frac{y}{R}\cdot\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{j}+\frac{z}{R}\cdot\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{j}\right)=-v^2$ (I). Припоминая, что x есть проекція R на ось x, получим: $\frac{x}{R}=Cs(R,x)$, гдѣ (R,x) означает угол между радиусом и осью x-ов; также: $\frac{y}{R}=Cs(R,y)$, $\frac{z}{R}=Cs(R,z)$. Так как $\frac{d^2x}{dt^2}$ есть проекція j на ось x-ов, то $\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{j}=Cs(j,x)$; $\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{j}=Cs(j,y)$; $\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{j}=Cs(j,z)$. Выраженіе (I) тогда примет такой вид: $Rj[Cs(R,x)\cdot Cs(j,x)+Cs(R,y)\cdot Cs(j,y)+Cs(R,z)\cdot Cs(j,z)]=-v^2$. Выраженіе в скобках есть Cosinus угла между направленіями R и j, т.е. $Cs(R,j)$; слѣдов., $Rj\cdot Cs(Rj)=-v^2$ или $j\cdot Cs(Rj)=-\frac{v^2}{R}$, что и треб. док., так как $j\cdot Cs(R,j)$ есть проекція ускоренія на направленіе радіуса R. Знак минус показывает, что эта проекція направлена к центру шара.

2. Прямоугольный параллелепипед $OABCDEFG$ в разсматриваемый момент времени участвует одновременно во вращеніи около 2х осей, проходящих через точку O. Угловая скорость 1го вращенія по величинѣ и направленію изображается вектором OF. Ось 2го вращенія направлена по OD. Зная, что скорость точки $B_z=61$ и что отрѣзки $OA=5$, $OC=4$, $OE=3$, найти угловую скорость вращенія около OD.

Отв. $\omega_1=10$; $\omega_2=-\frac{7380}{769}$.

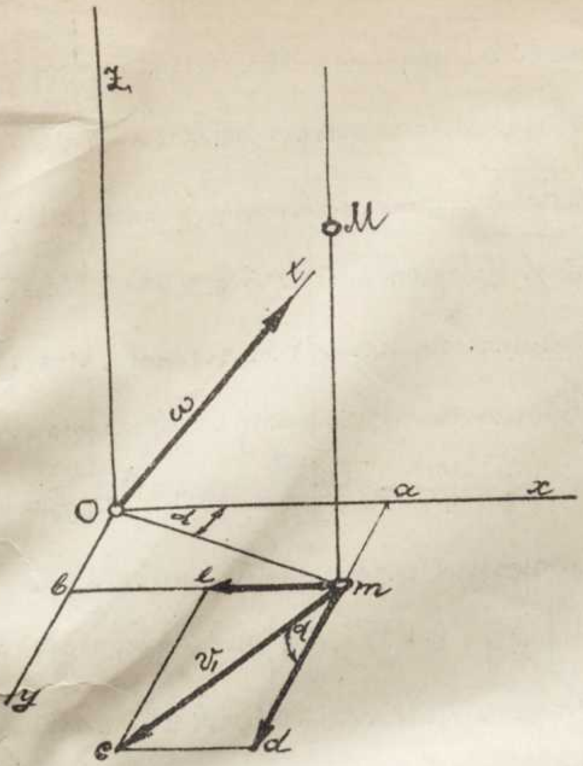
Рѣш. Напишем формулы Эйлера для проекцій скорости какой-нибудь точки твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной точки на оси координат, начало которых в этой точкѣ: $пр_x v=v_x=$



$= qz - ry$; $\text{пр}_y v = v_y = rx - pz$; $\text{пр}_z v = py - qz = v_z$; гдѣ $p = \text{пр}_x \omega$, $q = \text{пр}_y \omega$, $r = \text{пр}_z \omega$. В нашей задачѣ начало координат берем в O, ось X-ов по OA, Y-ов по OC и Z-ов по OE. Парал–пед вращается около оси OF с угловой скоростью OF и около оси OD с неизвѣстной угловой скоростью ω. Получится составное движенiе в видѣ вращенiя около нѣкоторой оси, проходящей через точку O с неизвѣстной угловой скоростью Ω, которая будет дiагональю параллелограмма, построеннаго на OF и ω. Слѣдов., $\text{пр}_x \Omega = \text{пр}_x OF + \text{пр}_x \omega$; $\text{пр}_y \Omega = \text{пр}_y OF + \text{пр}_y \omega$; $\text{пр}_z \Omega = \text{пр}_z OF + \text{пр}_z \omega$. Но $\text{пр}_x OF = OA = 5$; $\text{пр}_y OF = 0$; $\text{пр}_z OF = OE = 3$; $\text{пр}_x \omega = \omega . Cs\, DOA = 0$; $\text{пр}_y \omega = \omega . Cs\, DOC = \omega \cdot \frac{OC}{OD} = \omega \cdot \frac{4}{5}$; $\text{пр}_z \omega = \omega . Cs\, DOE = \omega \cdot \frac{OE}{OD} = \omega \cdot \frac{3}{5}$. Слѣдов., получаем: $\text{пр}_x \Omega = 5$; $\text{пр}_y \Omega = \frac{4}{5}\omega$; $\text{пр}_z \Omega = 3 + \frac{3}{5}\omega$. Если скорость точки B обозначим через v ($v = 61$) и внеся в формулы Эйлера координаты точки B$(x=5, y=4, z=0)$ и вмѣсто p, q и r соотвѣтствующiя значенiя $\text{пр}_x \Omega$, $\text{пр}_y \Omega$, $\text{пр}_z \Omega$, то получим: $v_x = -(3 + \frac{3}{5}\omega).4$; $v_y = (3 + \frac{3}{5}\omega).5$; $v_z = 5.4 - \frac{4}{5}\omega.5$. Возведя в квадрат и сложив, получим: $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 16(9 + \frac{18}{5}\omega + \frac{9}{25}\omega^2) + (225 + 90\omega + 9\omega^2) + (400 - 160\omega + 16\omega^2)$. Но $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = 61$, слѣдов., $61^2 = 144 + 225 + 400 + \frac{288}{5}\omega + 90\omega - 160\omega + \frac{144}{25}\omega^2 + 9\omega^2 + 16\omega^2$ или $\frac{769}{25}\omega^2 - \frac{62}{5}\omega - 2925 = 0$ или: $769\omega^2 - 310\omega - 73800 = 0$; $\omega = \frac{155 \pm \sqrt{155^2 + 769.73800}}{769}$; $\omega_1 = 10$; $\omega_2 = -\frac{7380}{769}$. Знак минус показывает, что вектор ω направлен или по OD или по DO.

№3. Вывести формулы Эйлера иным путем, чѣм сдѣлано в курсѣ.

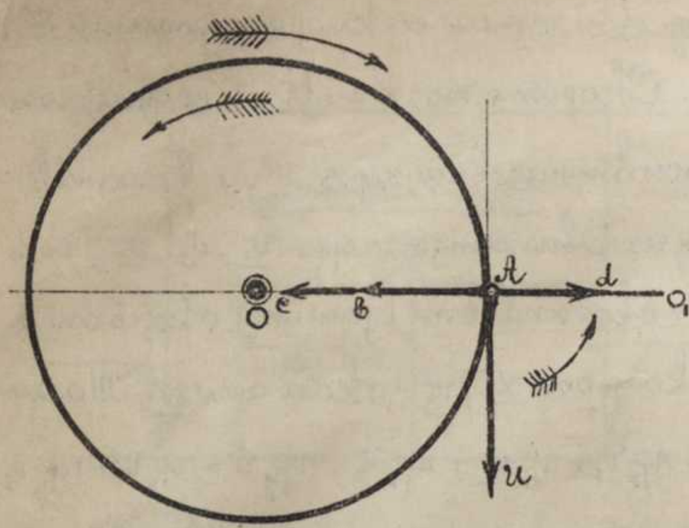
Рѣш. Пусть тѣло вращается около оси Ot с угловой скоростью ω. Разложим вектор ω на 3 вектора по осям координат: $p = \text{пр}_x \omega$, $q = \text{пр}_y \omega$, $r = \text{пр}_z \omega$. Движенiе около данной оси можно разсматривать, как составное движенiе, сложенное из вращенiй около осей координат с угловыми скоростями p, q, r. Возьмем



точку $\underline{M}$ тѣла с координатами $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$. Скорость точки $\underline{M}$ в составном движеніи назовем через $\underline{v}$, а в составляющих движеніях через $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$, $\underline{v_3}$, гдѣ $\underline{v_1}$ есть скорость от вращенія около оси $\underline{z}$, $\underline{v_2}$ — около оси $\underline{x}$, $\underline{v_3}$ — около оси $\underline{y}$. Тогда: $\text{пр}_x v = \text{пр}_x v_1 + \text{пр}_x v_2 + \text{пр}_x v_3$; $\text{пр}_y v = \text{пр}_y v_1 + \text{пр}_y v_2 + \text{пр}_y v_3$; $\text{пр}_z v = \text{пр}_z v_1 + \text{пр}_z v_2 + \text{пр}_z v_3$. Проведем прямую $\underline{Mm}$, $\|^{\text{ю}}$ $\underline{Oz}$; точки $\underline{M}$ и $\underline{m}$ (а также всѣ точки этой прямой) имѣют одну и ту же скорость от вращенія около оси z, равную $\underline{v_1}$. На чертежѣ $\underline{v_1} = mc = r.Om$. Кромѣ того, $\underline{mc} \perp^{\text{но}}$ к $\underline{Om}$ и $ma = y$, $Oa = x$; разложим вектор $\underline{v_1}$ по осям $\underline{Ox}$ и $\underline{Oy}$, считая положительными направленія, идущія от начала координат $\underline{O}$; тогда $\text{пр}_y v_1 = md = v_1 \cdot \text{Cs}\alpha = v_1 \cdot \frac{Oa}{Om} = r.Om \cdot \frac{x}{Om} = rx$; $\text{пр}_x v_1 = -me = -v_1 \cdot \text{Sn}\alpha = -v_1 \cdot \frac{ma}{Om} = -r.Om \cdot \frac{y}{Om} = -ry$; $\text{пр}_z v_1 = 0$. Если замѣтим $\underline{z}$ через $\underline{x}$, $\underline{x}$ через $\underline{y}$, $\underline{y}$ через $\underline{z}$ в предыдущих формулах, то получим: $\text{пр}_x v_2 = 0$; $\text{пр}_y v_2 = -pz$; $\text{пр}_z v_2 = py$. Замѣнить $\underline{x}$ через $\underline{y}$, $\underline{y}$ через $\underline{z}$, $\underline{z}$ через $\underline{x}$ в предыдущих формулах (для $\underline{v_2}$), получим: $\text{пр}_y v_3 = 0$; $\text{пр}_x v_3 = qz$, $\text{пр}_z v_3 = -qx$. Слѣд. $\text{пр}_x v_1 + \text{пр}_x v_2 + \text{пр}_x v_3 = qz - ry$; $\text{пр}_y v_1 + \text{пр}_y v_2 + \text{пр}_y v_3 = rx - pz$; $\text{пр}_z v_1 + \text{пр}_z v_2 + \text{пр}_z v_3 = py - qx$, т.е. $\text{пр}_x v = qz - ry$; $\text{пр}_y v = rx - pz$; $\text{пр}_z v = py - qx$, что́ представляет собой формулы Эйлера.

№ 4. Точка, двигаясь равномѣрно, обходит в направленіи движенія часовой стрѣлки $\underline{6}$ раз в секунду окружность кольца. В то́ же время кольцо вращается около своего центра в противоположную сторону, дѣлая $\underline{3}$ оборота в секунду. Радіус кольца $= 2$ mtr. Найти абсолютное ускореніе точки непосредственно и по правилу сложенія ускореній. $\underline{\text{Отв}}.$ $j = 72\pi^2$.

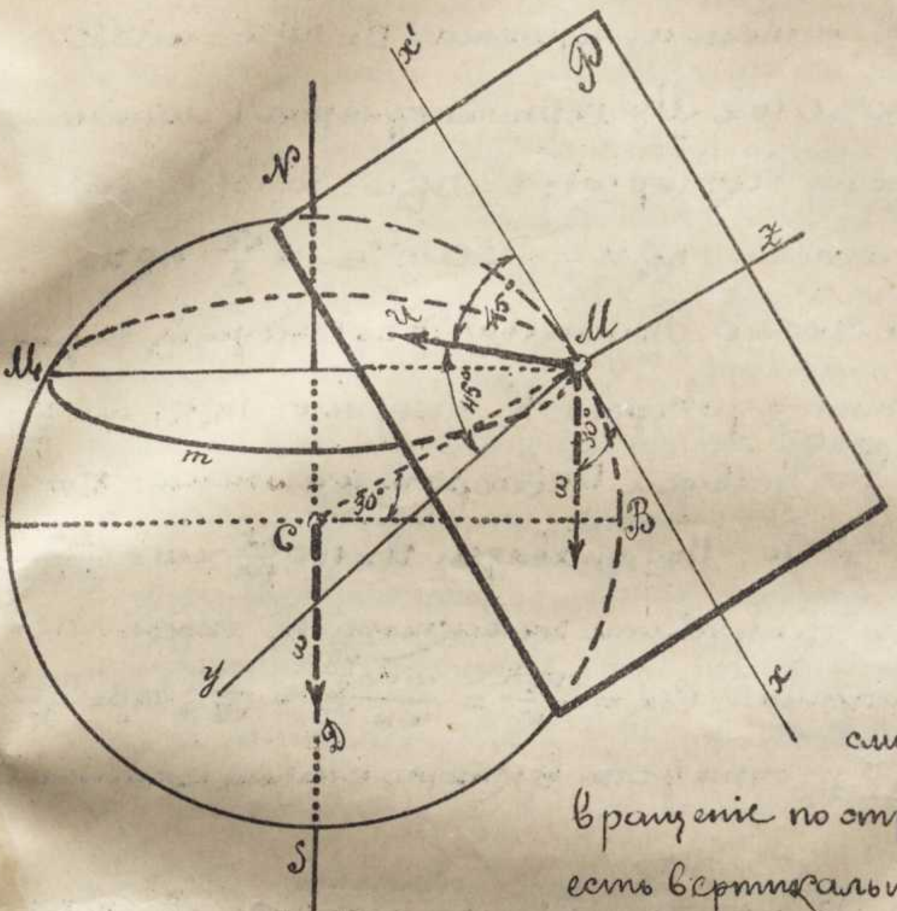
$\underline{\text{Рѣш}}.$ Движеніе точки есть составное: из собственнаго движенія по кольцу и из переноснаго движенія кольца. Очевидно, со=



стивное движеніе сведется к круговому движенію в направленіи движенія часовой стрѣлки по 3 оборота в секунду. Скорость $v = 3.2\pi r = 3.2\pi 2 = 1$[2π]; при равномѣрном движеніи все ускореніе сводится к центростремительному, т. е. $j = \frac{v^2}{r} = \frac{(12\pi)^2}{2} = 72\pi^2$. Посредством сложенія ускореній разсуждаем так: $\bar{j} = \bar{g} + \bar{l} + \bar{k}$; $\bar{g}$ — есть ускореніе относительнаго движенія; скорость относит. движенія $u = 24\pi$; слѣд., $g = \frac{u^2}{r} = \frac{(24\pi)^2}{2} = 288\pi^2$; $\bar{l}$ — есть ускор. переноснаго движ.; $l = \frac{(12\pi)^2}{2} = 72\pi^2$. Направлены они оба от A к O (на чертежѣ $\bar{g} = AC$, $\bar{l} = Ab$); $\bar{k}$ — есть поворотное ускореніе; оно выражается так: $\bar{k} = 2\omega . \sin\theta$; ω — угловая скорость вращенія траекторіи; $\omega = 3.2\pi = 6\pi$. u — скорость относительнаго движ.; $u = 24\pi$; θ — угол между направленіем относит. скорости и осью вращенія траекторіи. Очевидно, у нас $\theta = 90°$ (ось вращенія $\perp$ на к плоскости чертежа в центрѣ O). Слѣд., $\bar{k} = 2\omega . u . \sin\theta = 2.6\pi . 24\pi = 288\pi^2$. Направленіе $\bar{k}$ опредѣлится по правилу, указанному в курсѣ, повернув вектор u на 90° по направленію переноснаго движенія; слѣдов., $\bar{k}$ направлено от O к O_1 (на чертежѣ $k = Ad$). Итак, $j = 288\pi^2 + 72\pi^2 - 288\pi^2 = 72\pi^2$.

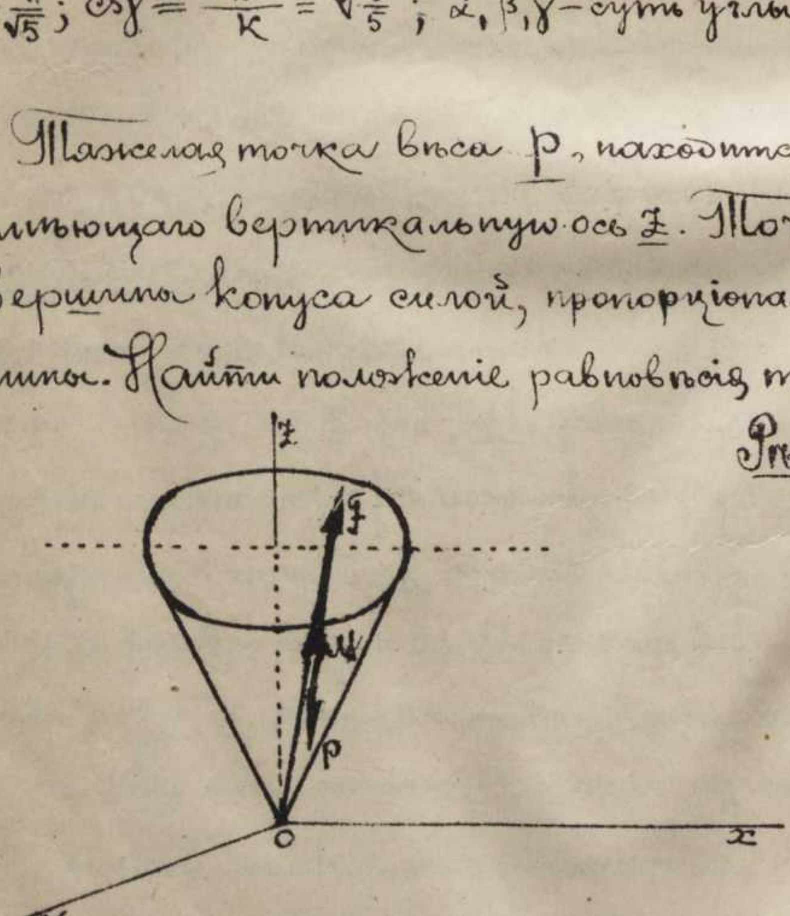
Упражненіе III.

№ 1. Точка M, находящаяся на землѣ под широтой $30°$ (сѣв. шир.), движется в разсматриваемый момент времени в горизонтальной плоскости строго к сѣверо-западу со скоростью $100 \frac{mtr}{sec}$. Найти поворотное ускореніе точки по величинѣ и направленію.



Рѣш. Пусть C есть центр земли, NS — полярная ось, т. е. ось вращенія земли, причем N — сѣвер, S — юг. Вращеніе земли происходит с запада на восток, а потому вектор CD, показывающій угловую скорость земли ω, откладываем вниз, чтобы, смотря с конца его, видѣли вращеніе по стрѣлкѣ часов. Прямая CM есть вертикальная линія земли в точкѣ M; плоскость P, перпендикулярная к отвѣсной линіи CM, есть горизонтальная плоскость; круг MNM_1ASB есть меридіан мѣста M; MmM_1 есть параллельный круг мѣста M. За начало координат возьмем точку M; ось Z направим по отвѣсной линіи CM вверх; другія двѣ оси будут тогда лежать в горизонт. плоскости P; причем, за ось X берем прямую xMx', касательную к меридіану в точкѣ M (она есть линія пересѣченія плоскости P с меридіаном), так что конец x указывает на юг, а конец x' на сѣвер; осью y будет прямая My, перпендикулярная к осям Z и X, и потому она лежит в плоск. P и в плоск. MmM_1 (она есть линія их пересѣченія) и касательна к параллельному кругу. Скорость точки М ($u = 100\frac{mt}{sec}$) направлена строго на съв-запад, т.е. она дълит $\angle x'My$ пополам. Для опредъленія поворотнаго ускоренія точки М, воспользуемся формулами, выражающими его проекціи на оси координат: $np_x K = 2(q\cdot np_z u - r\cdot np_y u)$; $np_y K = 2(r\cdot np_x u - p\, np_z u)$; $np_z K = 2(p\cdot np_y u - q\cdot np_x u)$, гдъ $p = np_x\omega$, $q = np_y\omega$, $r = np_z\omega$. Проведя вектор $ME = \omega$ параллельно вектору CD, найдем из чертежа: $p = np_x\omega = \omega.Cs30° = \omega\cdot\frac{\sqrt3}{2}$; $q = np_y\omega = \omega.cs90° = 0$ (ось My перпендикулярна к меридіану в плоскости котораго лежит вектор ω); $r = np_z\omega = \omega.Cs(90°+30°) = -\frac{\omega}{2}$. Из чертежа же находим: $np_x u = -u.cs45° = -u\frac{\sqrt2}{2}$; $np_y u = u.cs45° = u\frac{\sqrt2}{2}$; $np_z u = u.cs90° = 0$. Подставив в предыдущія формулы для проекцій поворотнаго ускоренія K, получим: $np_x K = \omega u\frac{\sqrt2}{2}$; $np_y K = \omega u\frac{\sqrt2}{2}$; $np_z K = \omega u\frac{\sqrt6}{2}$. Возведем в квадрат и сложим: $K = \sqrt{(np_xK)^2+(np_yK)^2+(np_zK)^2} = \frac{\omega u}{2}\sqrt{10}$. Подставляем $u = 100\frac{mt}{sec}$ и $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}$ и мы получим: $K = \frac{\pi\sqrt{10}}{864}$. Направленіе же вектора K опредълится слъдующими формулами: $Cs\alpha = \frac{np_xK}{K} = \frac{\omega u\frac{\sqrt2}{2}}{\omega u\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt5}$; $cs\beta = \frac{np_yK}{K} = \frac{1}{\sqrt5}$; $cs\gamma = \frac{np_zK}{K} = \sqrt{\frac35}$; α, β, γ — суть углы вектора с осями координат.

№2. Тяжелая точка въса P, находится внутри конуса: $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=0$, имъющаго вертикальную ось Z. Точка отталкивается от вершины конуса силой, пропорціональной разстоянію от вершины. Найти положеніе равновъсія точки и давленіе на поверхность.



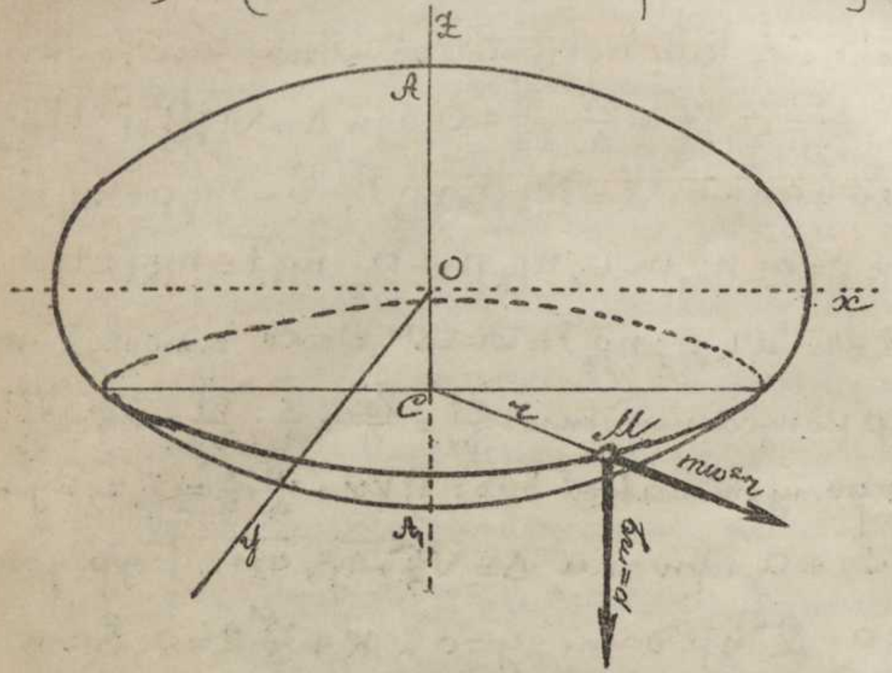
Рѣш. Вершина конуса находится в началъ координ. Пусть матеріальная точка находится в точкъ M конуса, координаты которой суть x, y, z; разстояніе $OM = r$;

Сила отталкиванія F выразится так: $F = kr$, гдъ

k – коэффиціент пропорціональности. На матеріальную точку M дѣйствуют: сила тяжести p, сила F и реакція поверхности N. Ур-ія равновѣсія, как извѣстно из Анал. мех., будут:
$X+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0$; $Y+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$; $Z+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=0$, гдѣ $\Delta=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$.
В данном случаѣ будем имѣть: $X=пр_x p+пр_x F$; $Y=пр_y p+пр_y F$; $Z=пр_z p+пр_z F$. Но $пр_x p=0$; $пр_y p=0$; $пр_z p=-p$; $пр_x F=пр_x(kr)=$ $=kr.Cs(r,x)=kx$; $пр_y F=kr.Cs(r,y)$; $пр_z F=kr.Cs(r,z)=kz$; слѣдов., $X=kx$, $Y=ky$, $Z=-p+kz$. Из ур. конуса находим: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$; $\frac{\partial f}{\partial z}=$ $=-2z$. Ур. равновѣсія примут такой вид: 1) $kx+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{x}{2}=0$, 2) $ky+$ $+\frac{N}{\Delta}\cdot 2y=0$, 3) $kz-p-\frac{N}{\Delta}\cdot 2z=0$, при чем $\Delta=\sqrt{\frac{x^2}{4}+4y^2+4z^2}$. 1^е ур. дает: или $x=0$, или $k+\frac{N}{2\Delta}=0$; 2^е ур. дает: $y=0$ и $k+\frac{N}{\Delta}\cdot 2=0$. Если примем $x=0$ и $y=0$, тогда из ур. конуса найдем $z=0$ и, слѣдов., $\Delta=0$ и ур. 3^е примет неопред. вид: $p+N\cdot\frac{0}{0}=0$, а потому этот случай исключается. Если примем $k+\frac{N}{2\Delta}=0$ и $k+\frac{2N}{\Delta}=0$, тогда получим противорѣчіе, т.к. из 1го рав. находим: $N=-2\Delta k$, а из 2го имѣем: $N=-\frac{\Delta k}{2}$; слѣдов., и этот случай исключается. Берем теперь из 1го ур. рѣшеніе $x=0$, а из 2го: $k+\frac{2N}{\Delta}=0$, $\frac{2N}{\Delta}=-k$; подставив в ур. 3^е, получим: $kz-p+kz=0$; $2kz-p=0$, $z=\frac{p}{2k}$. Подставляем в ур. конуса $x=0$, $z=\frac{p}{2k}$, и мы получим: $y^2-\frac{p^2}{4k^2}=0$; $y=\pm\frac{p}{2k}$. Теперь мы найдем также: $\Delta=\sqrt{\frac{x^2}{4}+4y^2+4z^2}=$ $=2\sqrt{\frac{p^2}{4k^2}+\frac{p^2}{4k^2}}=\frac{p}{k}\sqrt{2}$ и $N=-\frac{k\Delta}{2}=-\frac{p}{\sqrt{2}}$. Таким образом, одна система рѣшеній будет: $x_1=0$, $y_1=\pm\frac{p}{2k}$; $z_1=\frac{p}{2k}$. $N=-\frac{p}{\sqrt{2}}$ (знак минус при N указывает, что сила реакціи направлена внутрь). Возьмем теперь из 2го ур. рѣшеніе $y=0$, а из 1го $k+\frac{N}{2\Delta}=0$; тогда, по предыдущему найдем: $z=\frac{p}{5k}$, $x=\pm\frac{2p}{5k}$, $N=-\frac{2p}{\sqrt{5}}$; таким образом, 2^я система рѣшеній будет:

$$x_2=\pm\frac{2p}{5k},\quad y_2=0,\quad z_2=\frac{p}{5k},\quad N=-\frac{2p}{\sqrt{5}}.$$

№3. Тѣло, имѣющее полость в видѣ эллипсоида $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\right.$ $\left.+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$ вращается около вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω. Внутри полости положен шарик (тяжелый). Найти положеніе равновѣсія шарика.



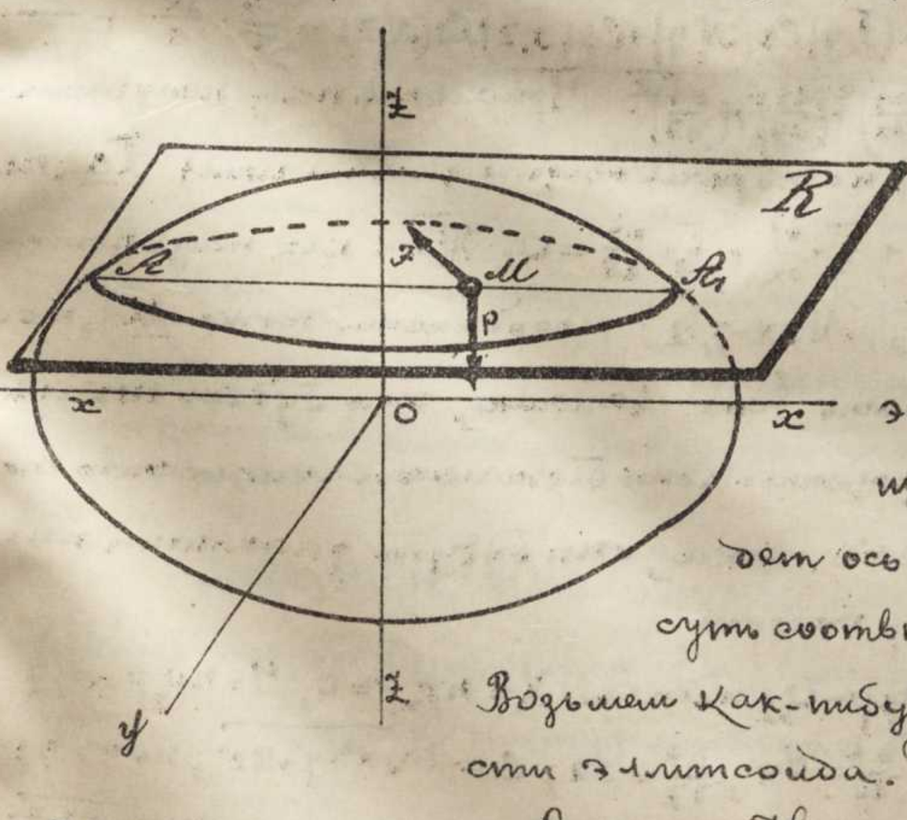
Рѣш. Пусть шарик находится в точкѣ M. При вращеніи он опишет окружность радиуса $r = CM$. На шарик дѣйствуют: сила тяжести $p = mg$, центробѣжная сила инерціи $m\omega^2 r$ и реакція поверхности N.

Пишем ур. равновѣсія: $X + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $Y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $Z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Но $X = np_x(mg) + np_x(m\omega^2 r) = 0 + m\omega^2(np_x r) = m\omega^2 x$; $Y = np_y(mg) + np_y(m\omega^2 r) = 0 + m\omega^2(np_y r) = m\omega^2 y$; $Z = np_z(mg) + np_z(m\omega^2 r) = -mg + 0 = -mg$; из ур. эллипсоида находим: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$ и мы получим слѣдующія условія равновѣсія: 1) $m\omega^2 x + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{2x}{a^2} = 0$, 2) $m\omega^2 y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{2y}{b^2} = 0$, 3) $-mg + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{2z}{c^2} = 0$. 1е ур. дает: $\left(m\omega^2 + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{2}{a^2}\right)x = 0$; слѣд., или $x = 0$ или $m\omega^2 + \frac{2N}{\Delta a^2} = 0$. 2е ур. дает: $y = 0$ и $m\omega^2 + \frac{2N}{\Delta b^2} = 0$; взяв рѣшенія $x = 0$, $y = 0$, получим из ур. поверхности $\frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$. Очевидно, рѣшеніе $z = +c$ не годится, т.к. это соотвѣтствует точкѣ A эллипсоида, гдѣ шарик должен был бы упасть; мы берем рѣшеніе $z = -c$, что соотвѣтствует точкѣ A_1. Далѣе имѣем: $\Delta = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$; при $x = 0$, $y = 0$, $z = -c$, имѣем: $\Delta = \frac{2}{c}$ и из ур. 3го найдем: $N = \frac{mg\Delta c^2}{2z} = -mg$. Итак 1я система рѣшеній будет: $x = 0$, $y = 0$, $z = -c$, $N = -mg$. Знак минус при N показывает, что реакція поверхности направлена внутрь полости. Рѣшенія: $m\omega^2 + \frac{2N}{\Delta a^2} = 0$ и $m\omega^2 + \frac{2N}{\Delta b^2} = 0$, очевидно, не годятся совмѣстно, так как мы получили бы, что $a = b$, что противорѣчит условію (в эллипсоидѣ, вообще, $a \neq b$). Берем рѣшенія: $x = 0$ и $m\omega^2 +$

$+\frac{2N}{\Delta b^2}=0$; это решение дает: $\frac{2N}{\Delta}=-mb^2\omega^2$; ур. 3е дает: $\frac{2N}{\Delta}=mg\frac{c^2}{z}$. Сравнивая, получаем: $-mb^2\omega^2=mg\frac{c^2}{z}$; отсюда находим: $z=$ $=-\frac{gc^2}{\omega^2b^2}$; после этого из ур. эллипсоида найдем: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{g^2c^2}{\omega^4b^4}=1$, откуда $y=\pm\frac{\sqrt{\omega^4b^4-g^2c^2}}{\omega^2b}$, это решение возможно при условии, если $\omega^4b^4-g^2c^2>0$ или $\omega^2>\frac{gc}{b^2}$. После этого найдем значение Δ и из ур. 3го знач. N. Итак 2я система решений будет: $x=0,\ y=\pm\frac{\sqrt{\omega^4b^4-g^2c^2}}{\omega^2b},\ z=-\frac{gc^2}{\omega^2b^2}$, при условии $\omega^2>\frac{gc}{b^2}$. Если возьмем решения: $y=0$ и $m\omega^2+\frac{2N}{\Delta a^2}=0$, тогда по предыдущему найдем: $z=-\frac{gc^2}{\omega^2a^2}$, а $x=\pm\frac{\sqrt{\omega^4a^4-g^2c^2}}{\omega^2a}$. След., 3я система решений есть $x=\pm\sqrt{\frac{\omega^4a^4-g^2c^2}{\omega^2a}}$, $y=0$, $z=-\frac{gc^2}{\omega^2a^2}$, если $\omega^2>\frac{gc}{a^2}$.

Упражнение IVе

№1. На неподвижный эллипсоид $(x^2+y^2+4z^2=1)$, ось z которого вертикальна, осторожно сыплют песок. Зная коэффициент трения f песка о поверхность эллипсоида, узнать, какая часть поверхности останется покрытой песком.



Реш. Представим прежде всего ур. эллипсоида в виде: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2-1=0$; из последняго мы видим, что это будет эллипсоид вращения; осью вращения будет ось z; оси эллипсоида суть соответственно: 2, 2 и 1.

Возьмем как-нибудь точку M поверхности эллипсоида. Пусть в этой точке находится песчинка веса p. На эту песчинку действуют: сила тяжести p, реакция поверхности N и сила трения F.

Песчинка стремится двигаться по нѣкоторой траекторіи, лежащей на поверхности; скорость ея, направленная по касательной к траекторіи, лежит в касательной плоскости, а т.к. сила тренія противоположна скорости, то сила $\underline{F}$ лежит также в касательной плоскости в точкѣ $\underline{M}$. Между силой тренія $\underline{F}$ и нормальным давленіем $\underline{N}$ существует зависимость, выражаемая неравенством $F < Nf$; в предѣльном случаѣ будем имѣть равенство $F = Nf$, так что вообще $F \leqq Nf$, или $F^2 \leqq N^2 f^2$. Назовем проекціи неизвѣстной силы $\underline{F}$ на оси координат через F_x, F_y, F_z. Ур-ія равновѣсія точки $\underline{M}$ вообще будут имѣть такой вид: 1) $X + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + F_x = 0$; 2) $Y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + F_y = 0$; 3) $Z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + F_z = 0$; к этим ур-іям прибавим ур. поверхности: 4) $f(x,y,z) = 0$ и еще 5^e ур., которое будет выражать то условіе, что сила $\underline{F}$ лежит в касательной плоскости, т.е. что угол между силой $\underline{F}$ и нормальной силой $\underline{N}$ лежит в касательной плоскости, т.е., что угол между $\underline{N}$ и $\underline{F}$ есть прямой, или же: $Cs(F,N) = 0$; но $Cs(F,N) = Cs(F,x).Cs(N,x) + Cs(F,y).Cs(N,y) + Cs(F,z).Cs(N,z) = \frac{F_x}{F}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta} + \frac{F_y}{F}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta} + \frac{F_z}{F}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta}$, гдѣ $\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$. Приравнявши нулю полученное выраженіе для $Cs(F,N)$ и отбросив общаго знаменателя $\underline{F.\Delta}$, получим 5^e ур.: 5) $F_x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + F_y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + F_z\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Так как неизвѣстных величин 7 ($F_x, F_y, F_z, N, x, y, z$ - координаты точки $\underline{M}$), то мы не можем опредѣлить всѣх величин; это будет показывать, что будет существовать безчисленное множество точек, гдѣ будет равновѣсіе песка; они будут занимать нѣкоторую часть поверхности.

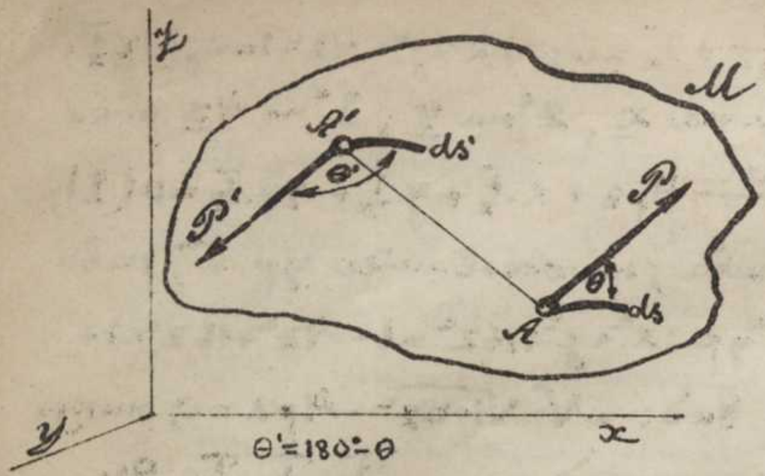
Упростим наши ур-ія; имѣем $X = пр_x P = 0$, $Y = пр_y P = 0$, $Z = пр_z P = -P$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 8z$; $\Delta = 2\sqrt{x^2+y^2+16z^2}$; но из ур. поверхности имѣем: $x^2+y^2 = 1-4z^2$, а потому $\Delta = 2\sqrt{1+12z^2}$; таким образом получаем слѣдующія ур-ія: 1) $N\cdot\frac{x}{\sqrt{1+12z^2}} + F_x = 0$;

2) $N\cdot\frac{y}{\sqrt{1+12z^2}}+F_y=0$; 3) $-p+N\cdot\frac{4z}{\sqrt{1+12z^2}}+F_z=0$; 4) $x^2+y^2+4z^2-1=0$; 5) $x\cdot F_x+y\cdot F_y+4z\cdot F_z=0$. Умножаемъ 1е ур. на x, 2е на y, 3е на $4z$ и складываемъ ихъ: $N\cdot\frac{x^2+y^2+16z^2}{\sqrt{1+12z^2}}-4pz+x\cdot F_x+y\,F_x+4z\cdot F_z=0$ (I); послѣдніе 3 члена этого равенства, на основаніи ур. 5го, равны нулю; на основаніи же 4го ур.: $x^2+y^2+16z^2=1-4z^2+16z^2=1+12z^2$; слѣдов., рав. (I) приметъ видъ: $N\cdot\sqrt{1+12z^2}-4pz=0$, откуда $N=\frac{4pz}{\sqrt{1+12z^2}}$. Теперь мы можемъ опредѣлить F_x, F_y, F_z. Изъ 1го ур. находимъ: $F_x=-\frac{4pzx}{1+12z^2}$; изъ 2го ур: $F_y=-\frac{4pzy}{1+12z^2}$; изъ 3го ур: $F_z=p-\frac{16pz^2}{1+12z^2}=\frac{p(1-4z^2)}{1+12z^2}$. Раньше мы имѣли: $F^2\le N^2f^2$; но $F^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2$; слѣд., $F_x^2+F_y^2+F_z^2\le N^2f^2$. Подставляемъ найденныя значенія величинъ: $\frac{p^2}{(1+12z^2)^2}\left[16z^2x^2+16z^2y^2+(1-4z^2)^2\right]\le\frac{16p^2z^2}{1+12z^2}f^2$; сокративъ, получимъ: $\frac{1}{1+12z^2}\cdot\left[16z^2(x^2+y^2)+(1-4z^2)^2\right]\le 16z^2f^2$. Подставивъ $x^2+y^2=1-4z^2$, получимъ: $\frac{1}{1+12z^2}\left[16z^2(1-4z^2)+(1-4z^2)^2\right]\le16z^2f^2$, или $\frac{1}{1+12z^2}\cdot(1-4z^2)(1+12z^2)\le16z^2f^2$, или же $1-4z^2\le16z^2f^2$; $1\le4z^2(1+4f^2)$; $z^2\ge\frac{1}{4(1+4f^2)}$; $z\ge\pm\frac{1}{2\sqrt{1+4f^2}}$. Итакъ, для равновѣсія необходимо существованіе послѣдняго неравенства. Знакъ минусъ, очевидно, нужно отбросить, такъ какъ при отрицательныхъ z не можетъ быть равновѣсія и мы получаемъ: $z\ge\frac{1}{2\sqrt{1+4f^2}}$. Предѣльный случай будетъ $z=\frac{1}{2\sqrt{1+4f^2}}$. Это ур. выражаетъ плоскость, параллельную плоскости xoy. Значитъ, вся часть поверхности, лежащая выше этой плоскости, будетъ покрыта пескомъ, т.к. тамъ возможно равновѣсіе. На чертежѣ это будетъ часть поверхности, лежащая надъ плоскостью R, пересѣкающей эллипсоидъ по окружности AA_1.

Задачи на примѣненіе метода Лагранжа.

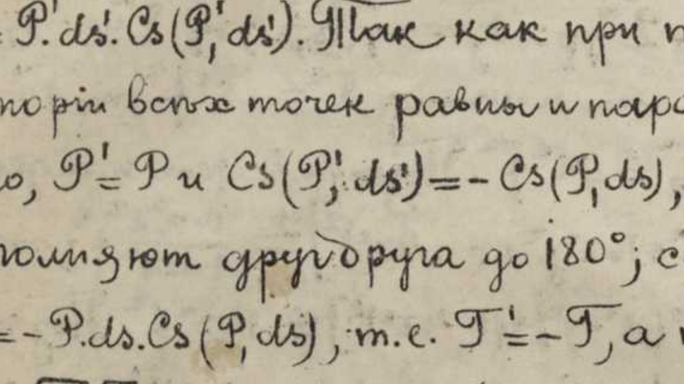
№2. Доказать, что работа пары, приложенной къ твердому тѣлу, при всякомъ поступательномъ перемѣщеніи тѣла, равна нулю.

Доказат. Пусть къ тѣлу M приложена пара (P, P') и тѣло



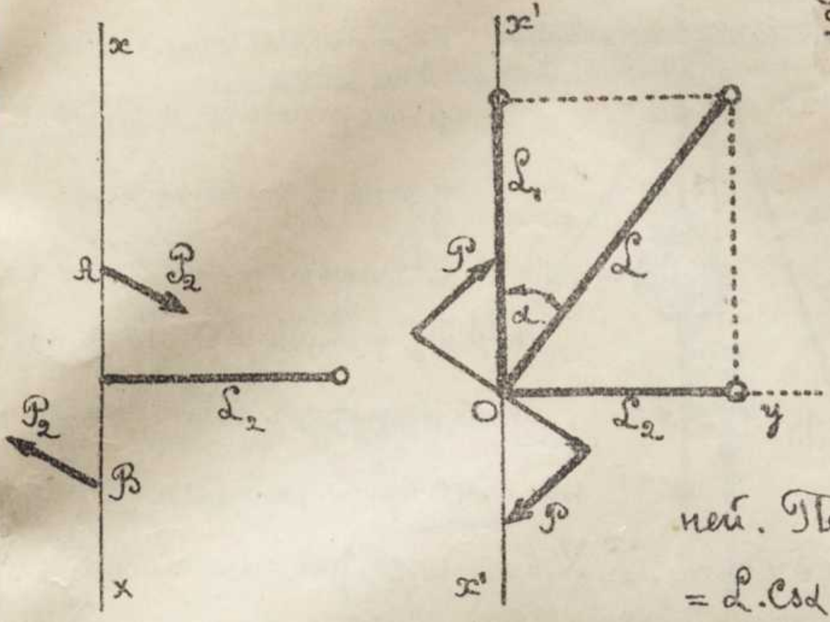
двигаться поступательно. Если точка приложения силы P (точка A) пройдет элемент пути ds, то работа силы P будет: $T = P.ds.Cs(P, ds)$. Работа силы P', приложенной к точке A_1, будет: $T' = P'.ds'.Cs(P', ds')$. Так как при поступательном движении траектории всех точек равны и параллельны, то $ds' = ds$; кроме того, $P' = P$ и $Cs(P', ds') = -Cs(P, ds)$, т. к. углы (P, ds) и (P', ds') дополняют друг друга до $180°$; слѣдов., $T' = P'ds'\,Cs(P', ds') = -P.ds.Cs(P, ds)$, т. е. $T' = -T$, а потому сумма работ $T + T' = T - T = 0$, что и треб. доказать. При конечном перемещении на величину S будет то же самое.

№ 3. Доказать, что работа пары при вращении тѣла около оси, перпендикулярной плоскости пары, на угол $d\varphi$ равна моменту пары, умноженному на $d\varphi$.



Доказат. Пусть плоскость чертежа совпадает с плоскостью пары, момент которой $L = P.R$ и пусть вращение происходит около оси, перпендикулярной к плоскости в точкѣ O. Как извѣстно из Теорет. Механ., пару можно переносить как угодно в ея плоскости или в плоскости ей параллельной. Перенесем пару так, чтобы одна сила P прошла через ось O; эта сила работы не произведет; 2я же сила P, при вращении на угол $d\varphi$, пройдет путь $ds = R.d\varphi$ и работа будет $P.ds.Cs(P, ds)$. Но $Cs(P, ds) = Cs\,0° = 1$, слѣдо., работа равна $P.ds = P.R\,d\varphi = L.d\varphi$, что и треб. док. При конечном углѣ φ, работа будет тоже $= L\varphi$.

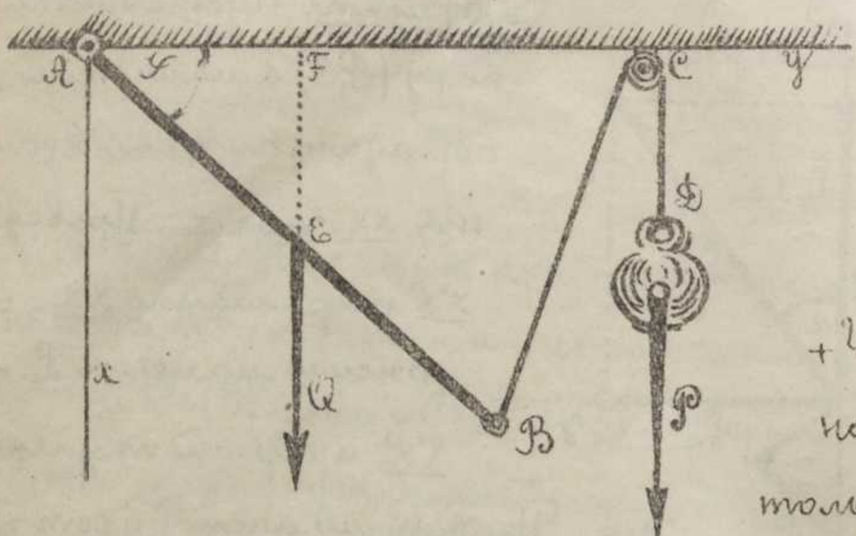
4. Доказать, что работа пары при вращеніи на $d\varphi$ около любой оси равна произведенію $d\varphi$ на проекцію геометрическаго момента пары на ось вращенія.



Доказат. Пусть имѣем пару $(P_1 P)$ с моментом L, образующим с осью вращенія xx угол α. Проведя $x'x'$ параллельно xx, разложим момент L по $x'x'$ и перпендикулярно к ней. Первый момент будет $L_1 = L.\cos\alpha$, 2й $L_2 = L.\sin\alpha$. Так как момент L_2 перпендикулярен к $x'x'$, то плоскость пары (P_2, P_2), соотвѣтствующей этому моменту, будучи перпендикулярна к L_2, проходит через $x'x'$. Эту плоскость можно перенести параллельно самой себѣ, чтобы она прошла через ось вращенія xx. Тогда ось xx будет лежать в одной плоскости с парой (P_2, P_2), и можно заставить эти силы пересѣчь ось, перенеся их в какія-нибудь точки оси A и B, тогда, очевидно, что онѣ работы не производят. Слѣд., момент L_2 работы не производит. Момент же L_1 параллелен оси вращенія; слѣд., ось вращенія перпендикулярна к плоскости пары (P_1, P_1), соотвѣтствующей этому моменту, а потому, по доказанному в предыдущей задачѣ, его работа будет $L_1.d\varphi$. Итак, работа пары $(P_1 P)$ с моментом L равна $L_1.d\varphi = L\cos\alpha.d\varphi$, что и треб. доказать, так как $L.\cos\alpha$ есть проекція момента пары на ось вращенія.

5. Стержень AB (длиною l и вѣса Q) может вращаться около шарнира A. Этот стержень удерживается в равно-

вѣсіи веревкой, прикрѣпленной в точкѣ B и перекинутой через блок C; к концу веревки привязан груз P. Длина AC=l. Опредѣлить угол φ при равновѣсіи

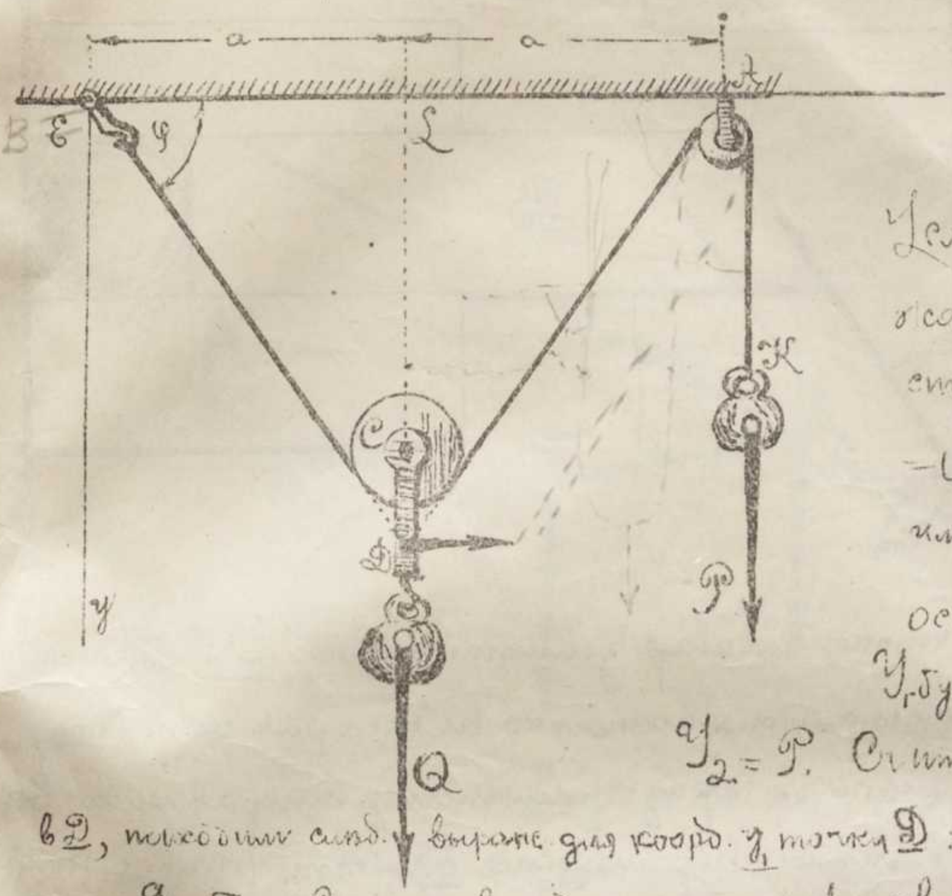


Реш. Выбрав оси координат как указано на чертежѣ, имѣем условіе равновѣсія Лагранжа. $\Sigma X.\delta x + Y.\delta y + Z.\delta z = 0$. В данном случаѣ имѣются только силы, параллельныя оси x, слѣд. ур. равновѣсія будет: $\Sigma X.\delta x = 0$. Данная система имѣет одну степень свободы, опредѣляемую параметром φ. Выразим через этот параметр координаты точек приложенія сил Q и P. Для силы Q имѣем $x = EF = EA.\sin\varphi$, или $x = \frac{l}{2}.\sin\varphi$. Для точки приложенія силы P, которую будем считать приложенной в точкѣ D, будем имѣть: $x' = DC = S - CB$, гдѣ S есть длина всей веревки, которая не мѣняется; но $BC = 2AB.\sin\frac{\varphi}{2} = 2l.\sin\frac{\varphi}{2}$; слѣд., $x' = S - 2l\sin\frac{\varphi}{2}$. Дифференцируя, находим: $\delta x = \frac{l}{2}\cos\varphi.\delta\varphi$; $\delta x' = -l\cos\frac{\varphi}{2}.\delta\varphi$. Теперь имѣем: $\Sigma X\delta x = Q.\delta x + P.\delta x' = Q\frac{l}{2}\cos\varphi.\delta\varphi - Pl.\cos\frac{\varphi}{2}.\delta\varphi = 0$ или $(Q\frac{l}{2}\cos\varphi - Pl\cos\frac{\varphi}{2})\delta\varphi = 0$. Так как $\delta\varphi \neq 0$, то: $Q\frac{l}{2}\cos\varphi - Pl\cos\frac{\varphi}{2} = 0$; $Q\cos\varphi - 2P\cos\frac{\varphi}{2} = 0$. Остается рѣшить это тригонометрич. ур-іе: $Q(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1) - 2P\cos\frac{\varphi}{2} = 0$; $2Q\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2P\cos\frac{\varphi}{2} - Q = 0$; $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 + 2Q^2}}{2Q}$; очевидно, надо брать только плюс: $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{P + \sqrt{P^2 + 2Q^2}}{2Q}$.

Упражненіе V.

№ 1. Один из концов гибкой нити, перекинутой через неподвижный блок A, прикрѣплен к неподвижной балкѣ в точкѣ B. К другому концу нити привязан груз P.

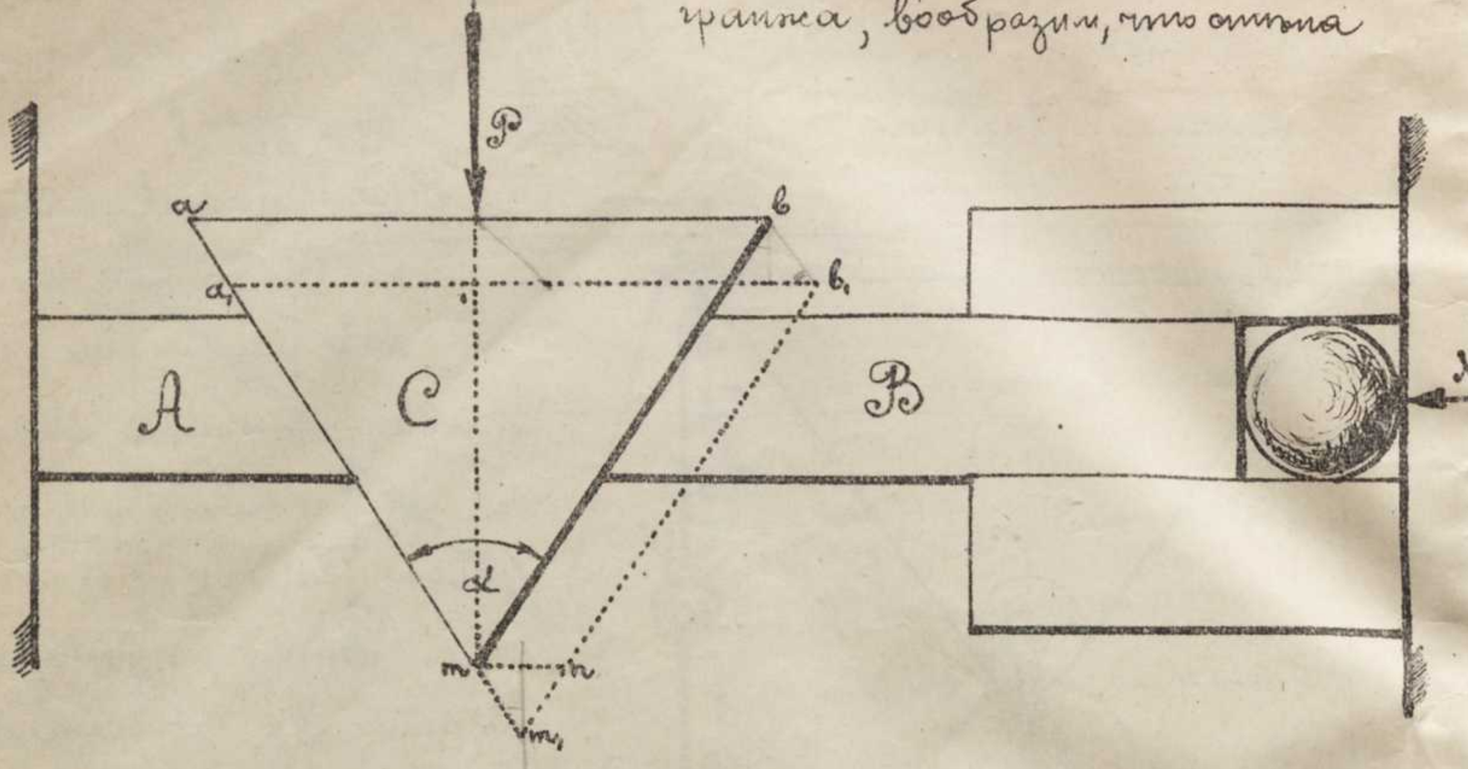
Часть нити между A и B огибает неподвижной блок C, вися=щий, вместе с прикрепленным к нему грузом, Q кг. Найти положение равновесия. Отв. $\sin\varphi = \frac{Q}{2P}$



Реш. Направление груза Q делит пополам разстояние AB. Условие равновесия механизма выражается равенством: $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$. В нашем примере имеем: $X = 0$, $Z = 0$; след., остается $\Sigma Y\delta y = 0$, или: $Y_1\delta y_1 + Y_2\delta y_2 = 0$, где $Y_1 = Q$, $Y_2 = P$. Считая точку приложения силы Q в D, находим след. выраж. для коорд. y_1 точки D: $y_1 = DL = a\,tg\varphi$, отсюда $\delta y_1 = \frac{a}{\cos^2\varphi}\cdot\delta\varphi$. Считая всю длину нити равной l, найдем, что длина части AK будет: $y_2 = l - 2BD = l - \frac{2a}{\cos\varphi}$ (это выражение только приближенное, но, при малых блоках и когда блок A близок к опоре, погрешность весьма мала). Дифференцируя, находим: $\delta y_2 = -\frac{2a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$. Подставив в ур. равновесия, получим: $Q\cdot\frac{a}{\cos^2\varphi}\delta\varphi - P\cdot\frac{2a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\delta\varphi = 0$ или $(Q - 2P\sin\varphi)\frac{a}{\cos^2\varphi}\delta\varphi = 0$, так как $\frac{a}{\cos^2\varphi}\delta\varphi \neq 0$, то след., $Q - 2P\sin\varphi = 0$, откуда $\sin\varphi = \frac{Q}{2P}$.

№2. Между двумя брусьями A и B, из которых 1-й неподвижен, а 2-й может перемещаться в горизонтальном направлении, помещен клин C с углом α при вершине. Между бруском B и неподвижной стеной помещен шар, прижимаемый бруском к стене. Определить давление N шара на стену. Отв. $N = \frac{P}{2}\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Реш. Давление шара на стену = давлению стены на шар. Чтобы имѣть здѣсь возможность пользоваться методом Лагранжа, вообразимъ, что стѣна



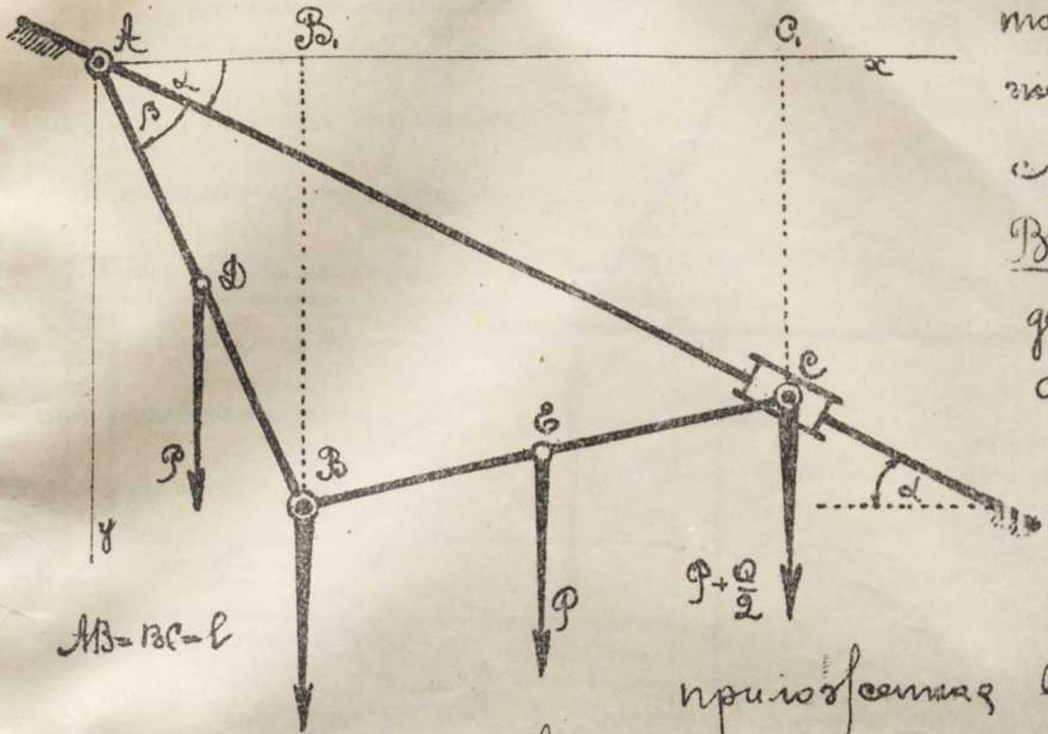
удалена, а дѣйствіе стѣны на шар замѣнимъ силой $\underline{N}$. Клинъ можетъ двигаться только поступательно по направленію $\underline{cm}$, брусокъ $\underline{B}$ и $\underline{шар}$ – только по горизонтальному направленію. Если дадимъ клину безк-малое перемѣщеніе $\underline{\delta s} = mm_1$ (новое положеніе клина будетъ $\underline{a_1 b_1 m_1}$), то брусокъ $\underline{B}$ и $\underline{шар}$ переместятся на величину $\delta s_1 = mn$. Значитъ, и точка приложенія силы $\underline{P}$ пройдетъ путь $\delta s = mm_1$, а точка приложенія силы $\underline{N}$ – путь $\delta s_1 = mn$. Работа силы $\underline{P}$ будетъ: $P . \delta s . Cs\frac{\alpha}{2}$ ($\frac{\alpha}{2}$ – уголъ между направленіемъ силы $\underline{P}$ и перемѣщеніемъ $\underline{\delta s}$). Работа силы $\underline{N}$ будетъ: $- N . \delta s_1$. Сумма работъ $= 0$, т.е.: $P Cs\frac{\alpha}{2} . \delta s - N . \delta s_1 = 0$ ($\underline{I}$); изъ $\Delta\ \underline{mnm_1}$ имѣемъ: $mn = 2 mm_1 . Sn\frac{\alpha}{2}$, или $\delta s_1 = 2 \delta s . Sn\frac{\alpha}{2}$; слѣд. ур. (I) приметъ видъ: $P . Cs\frac{\alpha}{2} . \delta s - 2 N Sn\frac{\alpha}{2} . \delta s = 0$, откуда: $P Cs\frac{\alpha}{2} - 2 N Sn\frac{\alpha}{2} = 0$ и $N = \frac{P}{2} Ctg\frac{\alpha}{2}$.

№ 3. Механизмъ, состоящій изъ кривошипа $\underline{AB}$, вѣса $\underline{P}$, шатуна $\underline{BC}$, одинаковаго по длинѣ и вѣсу с кривошипомъ и ползуна $\underline{C}$ вѣса $\underline{Q}$, расположенъ такимъ образомъ, что ползунъ можетъ скользить вдоль неподвижнаго стержня $\underline{AC}$, так=

лонелтаго к горизонту под углом α. Найти положенія равновѣсія.

Отв. $\operatorname{tg}\beta=\frac{P}{2(P+Q)}\operatorname{Ctg}\alpha$ (уголъ β см. на черт.)

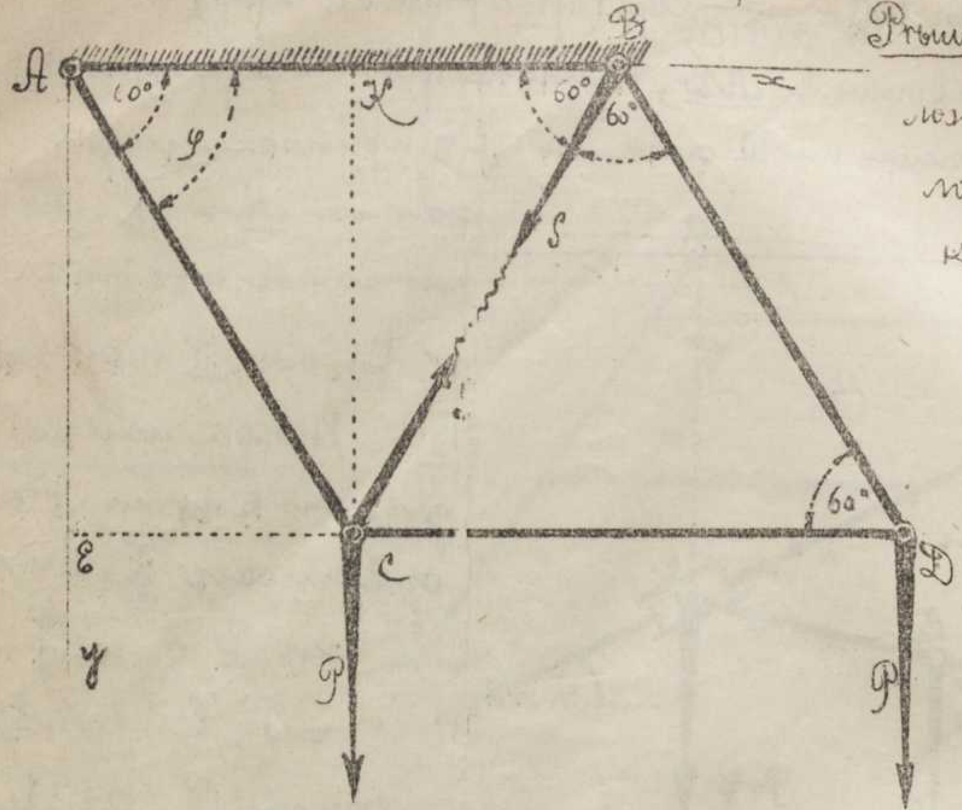
Рѣш. Вѣсъ P кривошипа AB, приложенный в середин AB, в точкѣ D, разложим на 2 силы по $\frac{P}{2}$, приложенныя в точках A и B. То же самое сдѣлаем с вѣсом P шатуна BC. Тогда мы найдем, что в точкѣ A дѣйствует сила $\frac{P}{2}$, в точкѣ B сила $\left(\frac{P}{2}+\frac{P}{2}\right)=P$; в точкѣ C — сила $\left(\frac{P}{2}+Q\right)$. Сила, приложенная в A работы не производит и мы разсмотрим только 2 послѣднія силы.



Выбрав оси координат как указано на чертежѣ, напишем условіе равновѣсія в видѣ: $\Sigma Y\delta y=0$ или: $Y_1\delta y_1+Y_2\delta y_2=0$, гдѣ Y_1 есть проекція силы в точкѣ B, т.е. $Y_1=P$ а $Y_2=Q+\frac{P}{2}$. Координата точки B будут: $y_1=BB_1=l\operatorname{Sn}(\alpha+\beta)$; координата точки C будет: $y_2=CC_1=AC.\operatorname{Sn}\alpha=2l\operatorname{Cs}\beta.\operatorname{Sn}\alpha$. Параметром является только уголъ β, так как α не мѣняется; слѣд., дифференцируя, получим: $\delta y_1=l\operatorname{Cs}(\alpha+\beta).\delta\beta$; $\delta y_2=-2l\operatorname{Sn}\alpha\operatorname{Sn}\beta.\delta\beta$. Уравн. равновѣсія примет вид: $Pl\operatorname{Cs}(\alpha+\beta).\delta\beta-\left(Q+\frac{P}{2}\right)2l\operatorname{Sn}\alpha.\operatorname{S}\beta.\delta\beta=0$, откуда получаем: $P\operatorname{Cs}(\alpha+\beta)-(2Q+P)\operatorname{Sn}\alpha\operatorname{Sn}\beta=0$; $P(\operatorname{Cs}\alpha\operatorname{Cs}\beta-2\operatorname{Sn}\alpha\operatorname{Sn}\beta)-2Q\operatorname{Sn}\alpha\operatorname{Sn}\beta=0$; $P\operatorname{Cs}\alpha.\operatorname{Cs}\beta=2(P+Q)\operatorname{Sn}\alpha.\operatorname{Sn}\beta$; откуда $\operatorname{tg}\beta=\frac{P}{2(P+Q)}.\operatorname{Ctg}\alpha$.

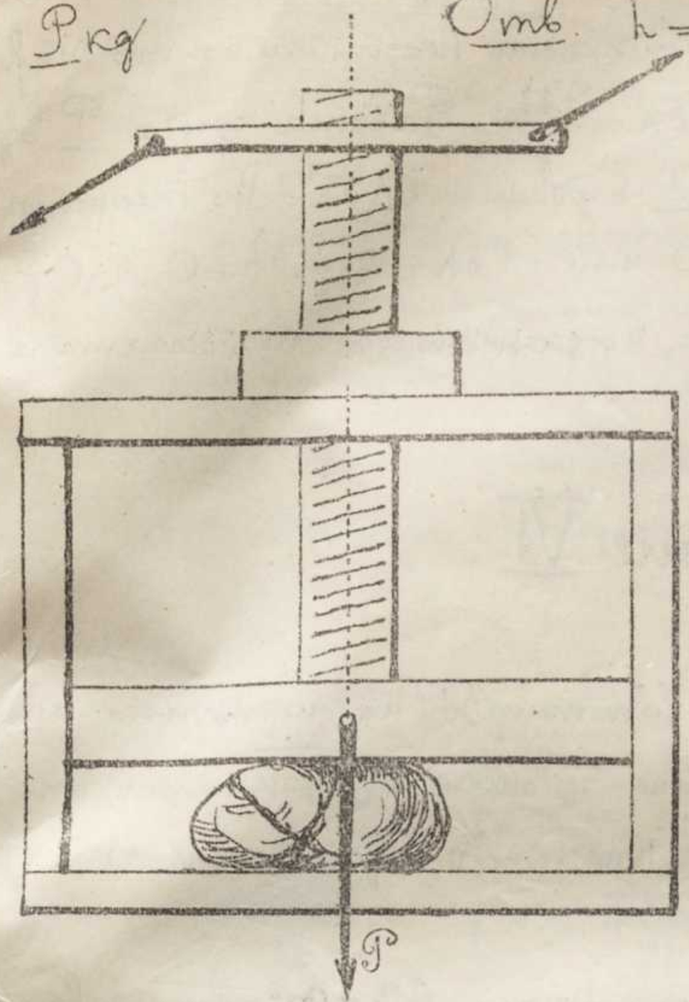
№4. 4 одинаковых стержня, длины l и вѣса P каждый, соединенных шарнирами, образуют ромб. Один из стержней AB закрѣплен неподвижно в горизонтальном положеніи. Вершина C, противоположная B, связана нитью, длины l, с B.

Вѣсомъ нити пренебрегаемъ. Опредѣлить натяженіе нити.



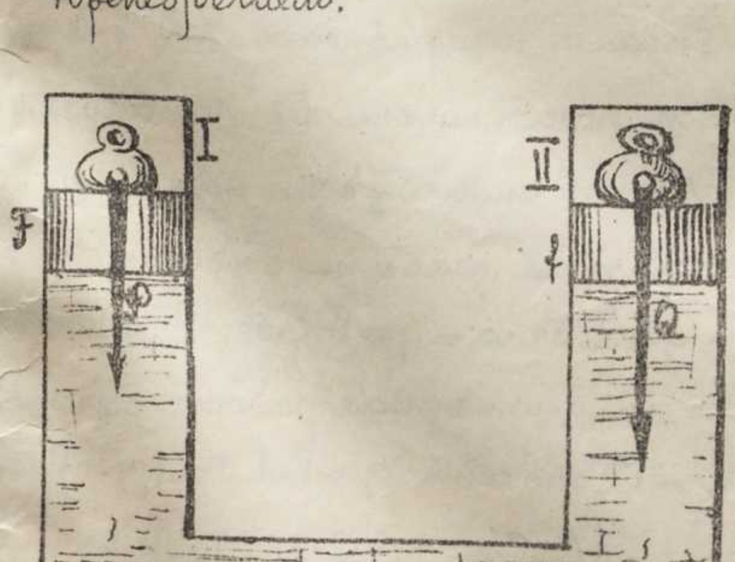
Рѣш. Вѣсъ стержня AC, приложенный въ его срединѣ, разложимъ на 2 силы по $\frac{P}{2}$ каждая, приложенныя въ точкахъ A и C. То же самое сдѣлаемъ съ вѣсомъ стержня BD и CD. Въ результатѣ найдемъ, что въ точкахъ A и B приложены силы по $\frac{P}{2}$, которыя работы не производятъ, а въ точкахъ C и D приложены силы по P каждая. Разрѣзаемъ нить и замѣняемъ ея дѣйствіе двумя силами по S, приложенными въ точкахъ B и C. Сила, приложенная въ B, работы не производитъ. Выбравъ оси координатъ, какъ указано на чертежѣ, найдемъ для вертикальной силы P въ точкѣ C: $Y_1 = P$, $X_1 = 0$; для силы S: $X_2 = S\cos 60° = \frac{S}{2}$; $Y_2 = -S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; для силы P въ точкѣ D: $Y_3 = P$, $X_3 = 0$. Единственнымъ параметромъ этой системы будетъ $\angle BAC$, который въ данномъ случаѣ $= 60°$, но, вообще можемъ его обозначить черезъ φ. Координаты точки C будутъ: $x_1 = CE = l\cos\varphi$, $y_1 = CK = l\sin\varphi$; для точки D намъ нужно узнать только координату y_2: $y_2 = y_1 = l\sin\varphi$. Дифференцируя, получимъ: $\delta y_1 = \delta y_2 = l\cos\varphi\cdot\delta\varphi$; $\delta x_1 = -l\sin\varphi\cdot\delta\varphi$. Ур. Лагранжа будетъ: $\Sigma(X\cdot\delta x + Y\cdot\delta y) = 0$, или: $X_2\cdot\delta x_1 + Y_1\cdot\delta y_1 + Y_2\cdot\delta y_1 + Y_3\cdot\delta y_1 = 0$. Подстановка дастъ: $-\frac{S}{2}l\sin\varphi\cdot\delta\varphi + P l\cos\varphi - S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l\cos\varphi\cdot\delta\varphi + P l\cos\varphi\,\delta\varphi = 0$. Сократив на $l\delta\varphi$, получимъ: $-\frac{S}{2}\sin\varphi + 2P\cos\varphi - S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = 0$. Но $\varphi = 60°$, а потому получаемъ: $-\frac{S\sqrt{3}}{4} + P - \frac{S\sqrt{3}}{4} = 0$; $S = \frac{2P}{\sqrt{3}}$.

№5. Дан винтовой пресс. Каков шаг винта, если пара усил. с моментом m, действуя на винт, может вызвать давление в P кг. Отв. $h = \frac{2\pi m}{P}$.



Реш. Если винт повернется на $\angle \delta\varphi$, то в направлении оси он продвинется на δh. Работа момента будет $m\delta\varphi$, работа силы P будет $-P.\delta h$. Сумма работ равна нулю, т.е.: $m.\delta\varphi - P.\delta h = 0$. Между перемещениями $\delta\varphi$ и δh существует соотношение: $\frac{\delta h}{\delta\varphi} = \frac{h}{2\pi}$; $\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$; наше ур. примет вид: $m\delta\varphi - P\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0$; $m - P\frac{h}{2\pi} = 0$, откуда $h = \frac{2\pi m}{P}$

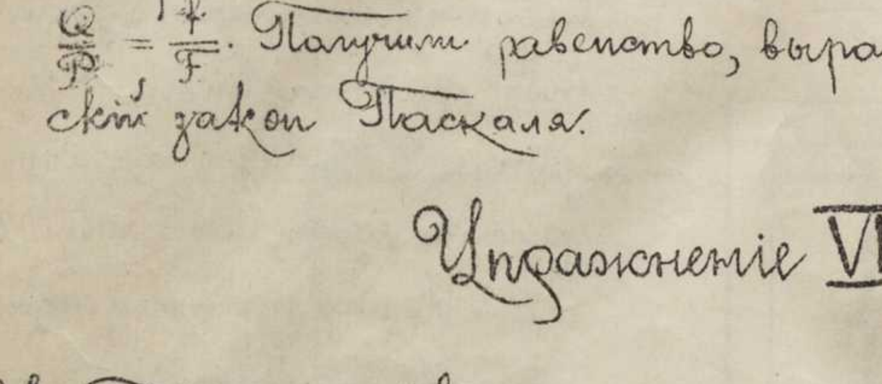
№6. Два цилиндра, соединенных между собой трубкой, закрыты поршнями, под которыми налита несжимаемая жидкость. На один поршень положен груз P. Какой груз нужно приложить на другой поршень, чтобы было равновесие. Весом жидкости пренебрегаем.



Реш. Пусть площадь поршня I^{го} сосуда будет F, а площадь поршня II^{го} сосуда будет f. Если на I^{й} поршень положен груз P, то на II^{й} поршень предстоит положить груз Q, который и нужно определить. Если I^{й} поршень опустится на высоту δh, то из I^го^ сосуда вытеснится об'ем жидкости $V = F\delta h$. Этот об'ем перейдет во II^й^ сосуд, где займет высоту $\delta h'$; так как жидкость несжимаема, то $V = f.\delta h'$, следов., $F.\delta h = f.\delta h'$; отсюда: $\delta h' = \frac{F.\delta h}{f}$. Работа груза P будет: $P.\delta h$; работа груза Q будет $-Q.\delta h'$. По теореме Лагранжа: $P.\delta h - Q.\delta h' = 0$ или: $P.\delta h - Q.\frac{F}{f}\delta h = 0$; $P - Q\frac{F}{f} = 0$, $\frac{Q}{P} = \frac{f}{F}$. Получим равенство, выражающее гидростатический закон Паскаля.

Упражнение VI

№1. Прямоугольный клин стоит гипотенузой на горизонтальной плоскости, через него переброшена цепочка. Показать, что в положении равновесия концы цепочки будут лежать на одной горизонтали.

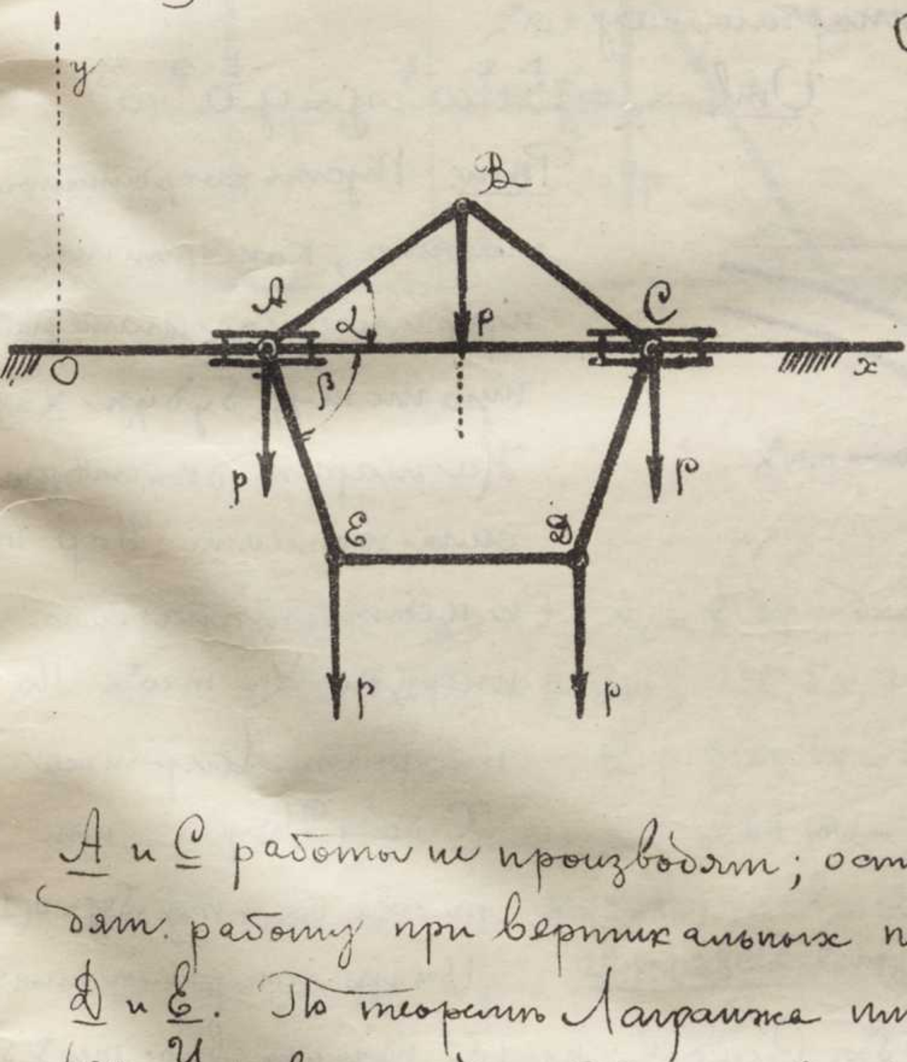


Реш. Пусть $AB + BC = l$, p — вес всей цепочки, q — вес единицы длины цепочки, так что $p = ql$; $AB = x$, $BC = y$. Какая-нибудь часть dx цепочки имеет вес $q.dx$; слагающая этого веса по направлению BD будет $qdx.\sin\alpha$. Если дадим цепочке перемещение δs по направлению от B к D, то работа этой силы будет $qdx.\sin\alpha.\delta s$. Для всей части AB элементарная работа будет: $T = \Sigma\, qdx \sin\alpha.\delta s = q\sin\alpha.\delta s \Sigma dx = q\sin\alpha.\delta s.x = qx\sin\alpha.\delta s$. Для части BC точно также найдем, что элементарная работа будет: $T_1 = -qy\sin\beta.\delta s$. Сумма работ $= 0$, то есть $qx\sin\alpha.\delta s - qy\sin\beta.\delta s = 0$, откуда: $x\sin\alpha = y\sin\beta$, т.е. $AB.\sin\alpha = BC.\sin\beta$ (I). Но из тр-ка DBE имеем: $BD.\sin\alpha = BE.\sin\beta$ (II) [чтобы доказать это равенство, нужно опустить перпендикуляр BK, тогда $BK = BD\sin\alpha$

$= BE.\sin\beta$). Из ур. (I) и (II) находим: $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$, т.е. тр-ки ABC и DBE подобны, слтд., AC ∥ DE, т.е. точки A и C лежат на одной горизонтали, что и треб. доказать.

№2. Пять одинаковых стержней соединены шарнирами. Два из этих шарниров соединены с ползунами, могущими двигаться по неподвижной горизонтальной прямой. При каком соотношении между отмеченными углами α и β будет равновесие. Вес каждаго стержня p, длина l.

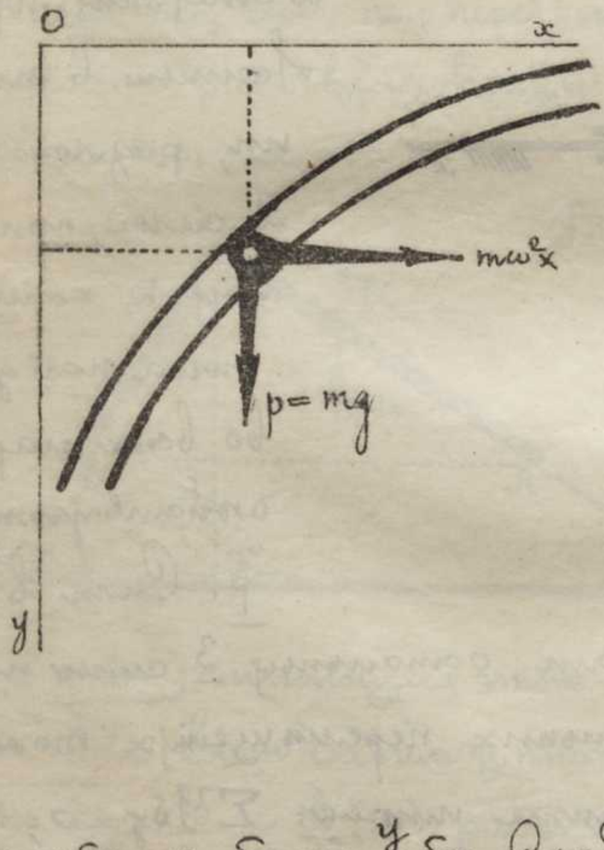
Отв. $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.



Реш. Вес каждаго стержня, приложенный в его средине, разложим на 2 силы, приложенныя к концам; тогда найдем, что во всех шарнирах действуют силы p. Силы в точках A и C работы не производят; остальныя 3 силы производят работу при вертикальных перемещениях точек B, D и E. По теореме Лагранжа имеем: $\Sigma Y\delta y = 0$; здесь все Y равны между собой и равны $(-p)$. Координаты же y будут: для точки B; $y_1 = l\sin\alpha$; для точек E и D: $y_2 = -l\sin\beta$; $\delta y_1 = l\cos\alpha.\delta\alpha$; $\delta y_2 = -l\cos\beta.\delta\beta$. Слтдов., по теореме Лагранжа: $-p.l\cos\alpha.\delta\alpha + 2p.l\cos\beta.\delta\beta = 0$, или, сократив на pl, получим: $2\cos\beta.\delta\beta - \cos\alpha.\delta\alpha = 0$ (I). Между α и β существует зависимость. Действительно, проекция на ось Ox ломаной ABC равна проекціи на ту же ось $AEDC$, т. е.: $2l.cs\alpha = 2l cs\beta + l$, или $2cs\alpha = 2cs\beta + 1$; дифференцируя, получим: $-2sn\alpha.\delta\alpha = -2sn\beta.\delta\beta$; $\delta\alpha = \frac{sn\beta}{sn\alpha}.\delta\beta$. Подставив в ур. (I), получим: $2cs\beta.\delta\beta - cs\alpha\frac{sn\beta}{sn\alpha}\delta\beta = 0$; $2\frac{sn\alpha}{cs\alpha} = \frac{sn\beta}{cs\beta}$, т. е., $tg\beta = 2tg\alpha$.

№3. Тяжелый шарик, вѣса P, заключен в трубку AB, имѣющую вид равносторонней гиперболы и вращающуюся около одной из своих асимптот, направленной по вертикали, с постоянной угловой скоростью ω. Найти положеніе равновѣсія шарика. Уравненіе гиперболы: $xy = a^2$.

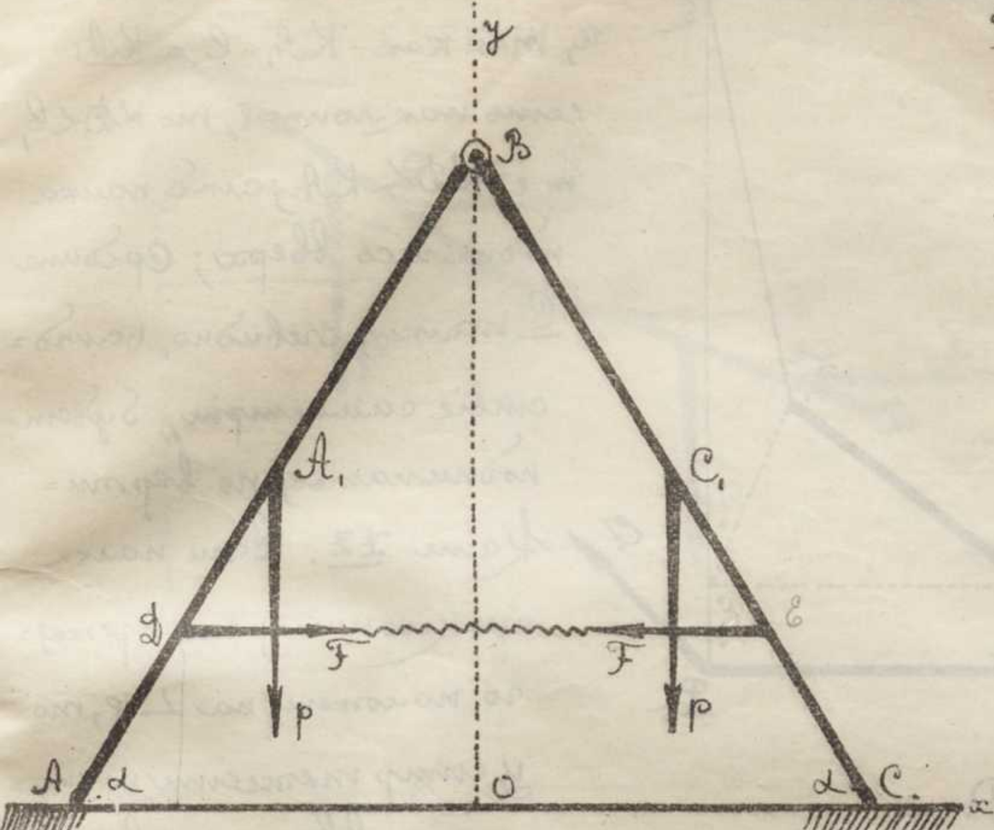
Отв. $x_0 = g^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{2}{3}}$; $y_0 = g^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{4}{3}} \omega^{\frac{2}{3}}$



Рѣш. Пусть координаты шарика, который мы принимаем за матеріальную точку, будут x и y. На шарик дѣйствует сила тяжести $Y = p = mg$ и центробѣжная сила инерціи $X = m\omega^2x$. По теореме Лагранжа $X.\delta x + Y.\delta y = 0$; или $m.\omega^2x.\delta x + mg.\delta y = 0$ (I). Из ур. гиперболы имѣем: $x\delta y + y\delta x = 0$; $\delta y = -\frac{y}{x}\delta x$. Слѣдов., ур. (I) приметь вид: $m\omega^2x.\delta x - mg.\frac{y}{x}.\delta x = 0$; $\frac{m\delta x(\omega^2x^2 - gy)}{x} = 0$; отсюда $\omega^2x^2 - gy = 0$; так как $y = \frac{a^2}{x}$, то имѣем: $\omega^2x^2 - g.\frac{a^2}{x} = 0$; $x^3 = g\frac{a^2}{\omega^2}$; $x = g^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{2}{3}}$, а $y = \frac{a^2}{x} = g^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{4}{3}} \omega^{\frac{2}{3}}$

№4. Двѣ доски, соединенныя шарниром, опираются на гладкій пол. Доски связаны упругой нитью, начальная длина которой дана и сила упругости которой пропорціональна вытяженію.

Найти вѣс стержней в положеніи равновѣсія. Дано: $BA = BC = a$; $BD = BE = b$; $\angle A = \angle C = \alpha$; начальная длина l_0.



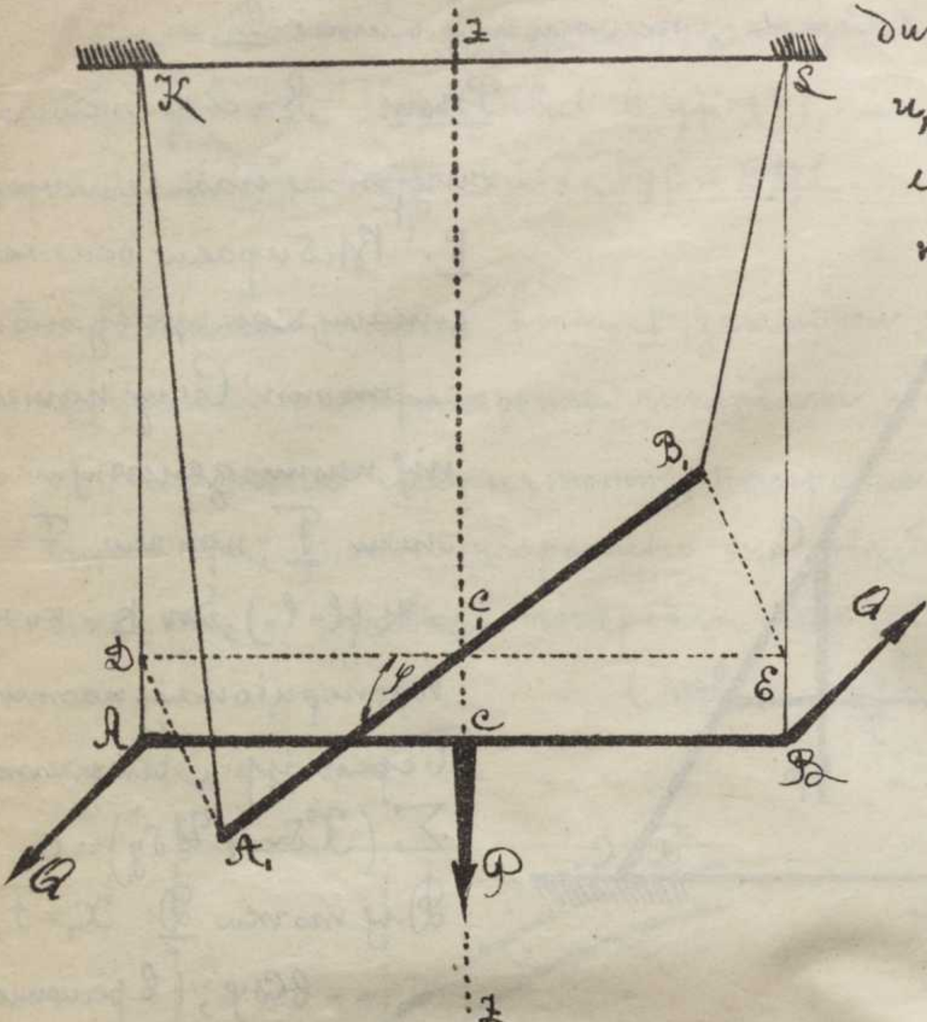
Рѣш. Вѣс каждаго стержня назовем через P. Выбираем оси координат, как указано на чертежѣ. Силу натяженія нити замѣним силами F, при чем, $F = k(l - l_0)$, гдѣ k - коэфф. пропорціональности. Берем ур. Лагранжа $\sum(X\delta x + Y\delta y) = 0$. Для точки D: $X_1 = F$, $x_1 = -b\cos\varphi$; (временно называем $\angle\alpha$ через перемѣнный $\angle\varphi$).

Для точки E: $X_2 = -F$, $x_2 = b\cos\varphi$; для A_1: $Y_1 = -p$; $y_1 = \frac{a}{2}\sin\varphi$; для C_1: $Y_2 = -p$; $y_2 = \frac{a}{2}\sin\varphi$; $X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + Y_1\delta y_1 + Y_2\delta y_2 = Fb\sin\varphi.\delta\varphi + Fb\sin\varphi.\delta\varphi - 2.p.\frac{a}{2}\cos\varphi.\delta\varphi = 0$; $2bF\sin\varphi - pa\cos\varphi = 0$; подставив $\varphi = \alpha$, получим: $2bF\sin\alpha - pa\cos\alpha = 0$; откуда: $p = \frac{2bF}{a}\operatorname{tg}\alpha$. Но $F = k(l - l_0)$, а $l = DE = 2b\cos\alpha$; слѣд., $F = k(2b\cos\alpha - l_0)$ и $p = \frac{2bk(2b\cos\alpha - l_0)}{a}\operatorname{tg}\alpha$.

№5. На двух нитях, длины l, подвѣшена тяжелая палка вѣса P и длины l. На палку дѣйствует пара момента M, лежащая в горизонт. плоскости. Опредѣлить положеніе равновѣсія.

Рѣш. При поворачиваніи палки AB, она, оставаясь горизонтальной, будет подниматься вверх. Дѣйствительно, если в новом положеніи A_1B_1 опустим перпендикуляр на го=

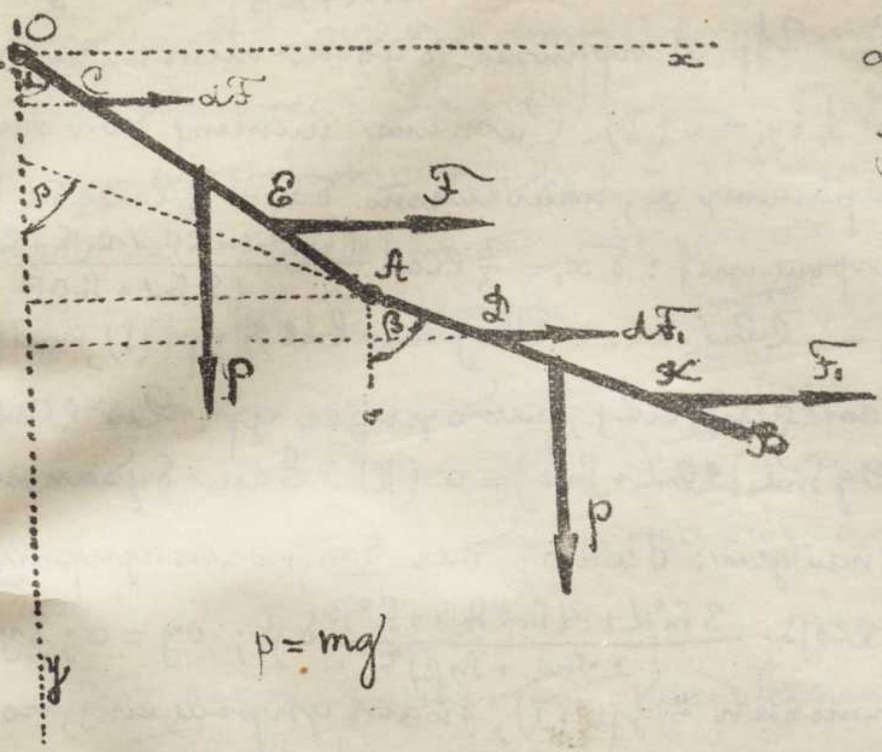
ризонтальную плоскость, в которой лежит A_1B_1, то этот перпендикуляр будет KD (или LE)



и, так как $KA_1 = l$, а KA_1 есть наклонная, то $KD < l$, т.е. $KD < KA$; слѣд. палка поднялась вверх; средина C палки, очевидно, вслѣдствіе симметріи, будет подниматься по вертикали ZZ. Если палка отклонится от прежняго положенія на $\angle \varphi$, то центр тяжести поднимется вверх на величину $h = CC_1 = AD = AK - DK = l - DK$; но из прямоугольнаго тр-ка KDA_1 имѣем: $DK = \sqrt{A_1K^2 - A_1D^2} = \sqrt{l^2 - A_1D^2}$, а A_1D опредѣлится из ΔA_1C_1D: $A_1D = 2A_1C_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = l\sin\frac{\varphi}{2}$; слѣд., $DK = \sqrt{l^2 - l^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = l\cos\frac{\varphi}{2}$, а $h = l - DK = l - l\cos\frac{\varphi}{2}$. При поворотѣ на $\angle \delta\varphi$ палка поднимется на δh; работа пары M будет $M.\delta\varphi$; работа вѣса P будет: $-P.\delta h$. При равновѣсіи, по теоремѣ Лагранжа, имѣем: $M\delta\varphi - P.\delta h = 0$ (I). Из равенства $h = l - l\cos\frac{\varphi}{2}$ имѣем: $\delta h = \frac{1}{2} l \sin\frac{\varphi}{2}\,\delta\varphi$. Ур. (I), слѣд., примет вид: $M.\delta\varphi - \frac{P}{2} l\sin\frac{\varphi}{2}\,\delta\varphi = 0$; $M - \frac{Pl}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 0$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2M}{Pl}$. Это выраженіе опредѣляет угол поворота палки, т.е. положеніе при равновѣсіи.

№6. Стержень OA, длины l и вѣса P, прикрѣплен шарниром к вертикальной оси OY. К нему прикрѣплен другой стержень AB, той же длины и вѣса. Ось вращается с постоянной угловой скоростью ω. Опредѣлить положеніе рав=

повыси.

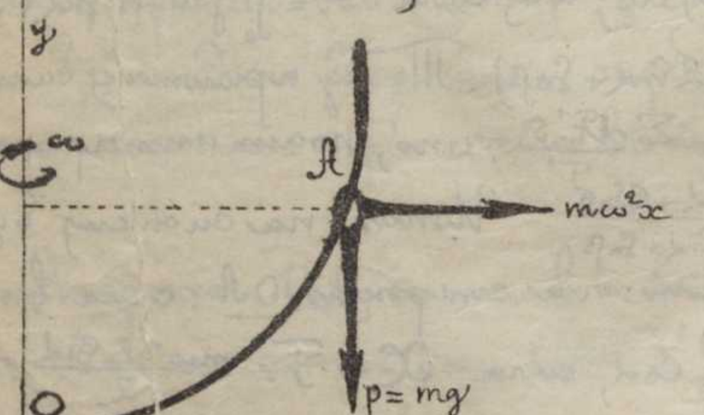


Рѣш. На стержени дѣйствует вѣс их, приложенный в их срединах и центробѣжная сила инерции, которую мы и опредѣлим. Возьмем точку C стержня OA. Назовем OC = S. На элемент ds будет дѣйствовать центробѣжная сила $dF = \mu\omega^2 x = \gamma\, ds.\omega^2 x$, гдѣ $\mu = \gamma ds$, γ же есть масса единицы длины стержня, так что $\gamma l = m$, т. е. масса стержня. Но $x = OC.\sin\alpha = S.\sin\alpha$; слѣд. $dF = \gamma\omega^2 \sin\alpha . S.ds$; вся сила, дѣйствующая на OA, будет: $F = \int_0^l \gamma\omega^2 \sin\alpha . S ds = \gamma\omega^2 \sin\alpha \frac{l^2}{2} = \frac{m\omega^2 \sin\alpha\, l}{2}$. Точку приложенія этой силы, E, найдем по формулѣ координат центра параллельных сил: $\bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$. В данном случаѣ имѣем: $OE = \bar{S} = \frac{\Sigma dF.s}{F} = \frac{\int_0^l \gamma\omega^2 \sin\alpha\, S^2 ds}{F} = \frac{\gamma\omega^2 \sin\alpha\, l^3 . 2}{3.\gamma\omega^2 \sin\alpha . l^2} = \frac{2}{3}l$. Поступаем точно также со стержнем AB: в точкѣ D имѣем: $dF' = \gamma\, ds\, \omega^2 x$; но $x = l\sin\alpha + S\sin\beta$; слѣд., $dF' = \gamma\omega^2(l\sin\alpha + S\sin\beta)ds$; вся сила $F' = \int_0^l \gamma\omega^2(l.\sin\alpha + S.\sin\beta)ds = \gamma\frac{\omega^2 l^2}{2}(2\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{m\omega^2 l}{2}(2\sin\alpha + \sin\beta)$. Точку приложенія силы K найдем из рав. $AK = \bar{S'} = \frac{\Sigma dF'.s}{F'}$, что, послѣ интегрированія, даст: $AK = \bar{S'} = \frac{l}{3}\cdot\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta}{2\sin\alpha + \sin\beta}$. Итак, на систему будут дѣйствовать слѣдующія силы: на стержень OA: сила вѣса $Y = p$ с координатой $y = \frac{l}{2}\cos\alpha$, сила $X = F = \frac{m\omega^2 l \sin\alpha}{2}$ с координатой $x = OE.\sin\alpha = \frac{2}{3} l \sin\alpha$. На стержень AB: вѣс

$Y_1 = p$ с координатой $y_1 = l\cos\alpha + \frac{l}{2}\cos\beta$ и сила $X_1 = F' = \frac{m\omega^2 l}{2}(2\sin\alpha + \sin\beta)$ с координатой $x_1 = l\sin\alpha + \frac{l}{3}\cdot\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta}{2\sin\alpha + \sin\beta}\cdot\sin\beta = \frac{2}{3}\cdot l\cdot \frac{3\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta}{2\sin\alpha + \sin\beta}$ Ур. Лагранжа будет иметь след. вид: $X.\delta x + X_1.\delta x_1 + Y.\delta y + Y_1.\delta y_1 = 0$ (I). Система имеет две степени свободы. Меняя параметр α, найдем, что $\delta x = \frac{2}{3} l\cos\alpha.\delta\alpha$. Для δx_1 найдем после упрощения: $\delta x_1 = \frac{2}{3} l\cos\alpha \frac{(6\sin^2\alpha + 6\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta)}{(2\sin\alpha + \sin\beta)^2}\delta\alpha$; $\delta y = -\frac{l}{2}\sin\alpha.\delta\alpha$; $\delta y_1 = -l\sin\alpha.\delta\alpha$. Подставив в ур. (I), найдем, после упрощения и сокращения, следующее ур: $2\omega^2 l\cos\alpha(8\sin^2\alpha + 7\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta) - 9g\sin\alpha(2\sin\alpha + \sin\beta) = 0$ (II). Если будем менять параметр β, то найдем: $\delta x = 0$; для δx_1, после упрощения, получим: $\delta x_1 = \frac{2}{3} l\cos\beta.\frac{3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta}{(2\sin\alpha + \sin\beta)^2}\delta\beta$; $\delta y = 0$; $\delta y_1 = -\frac{l}{2}.\sin\beta.\delta\beta$. При подстановке в ур. (I), после упрощения, получим: $2\omega^2 l\cos\beta(3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta) - 3g\sin\beta(2\sin\alpha + \sin\beta) = 0$ (III). α и β определятся из ур. (II) и (III). Решать их не будем, а только покажем, из каких ур. определяются α и β. (Эти ур. не были решены и на упражнении)

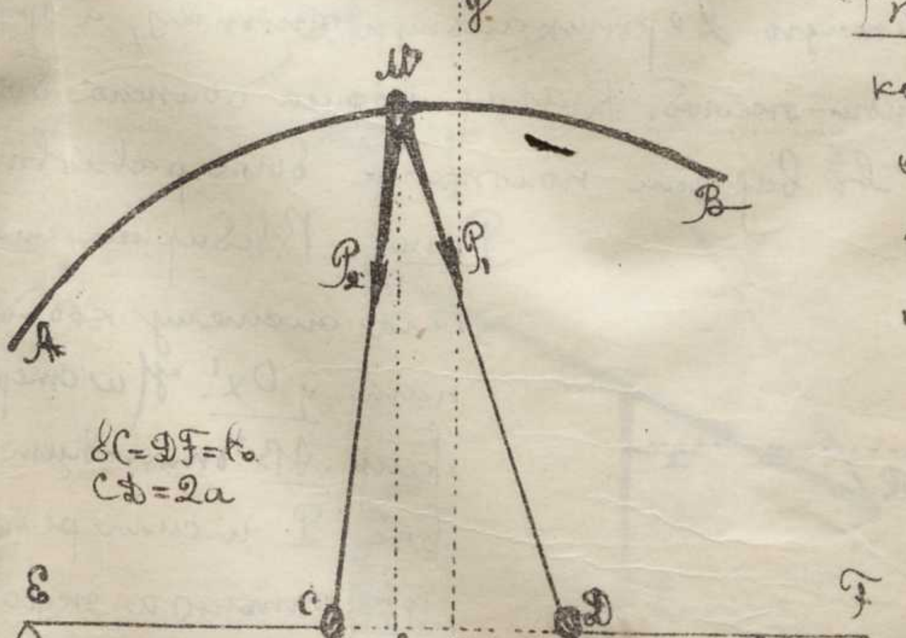
Упражнение VII.

№1. На изогнутый прут, прикрепленный к верт. оси и равномерно вращающийся около нея, надето колечко, веса P, могущее скользить по пруту. Какова форма прута, чтобы, при данной угловой скорости ω, колечко во всяком положении оставалось в равновесии.



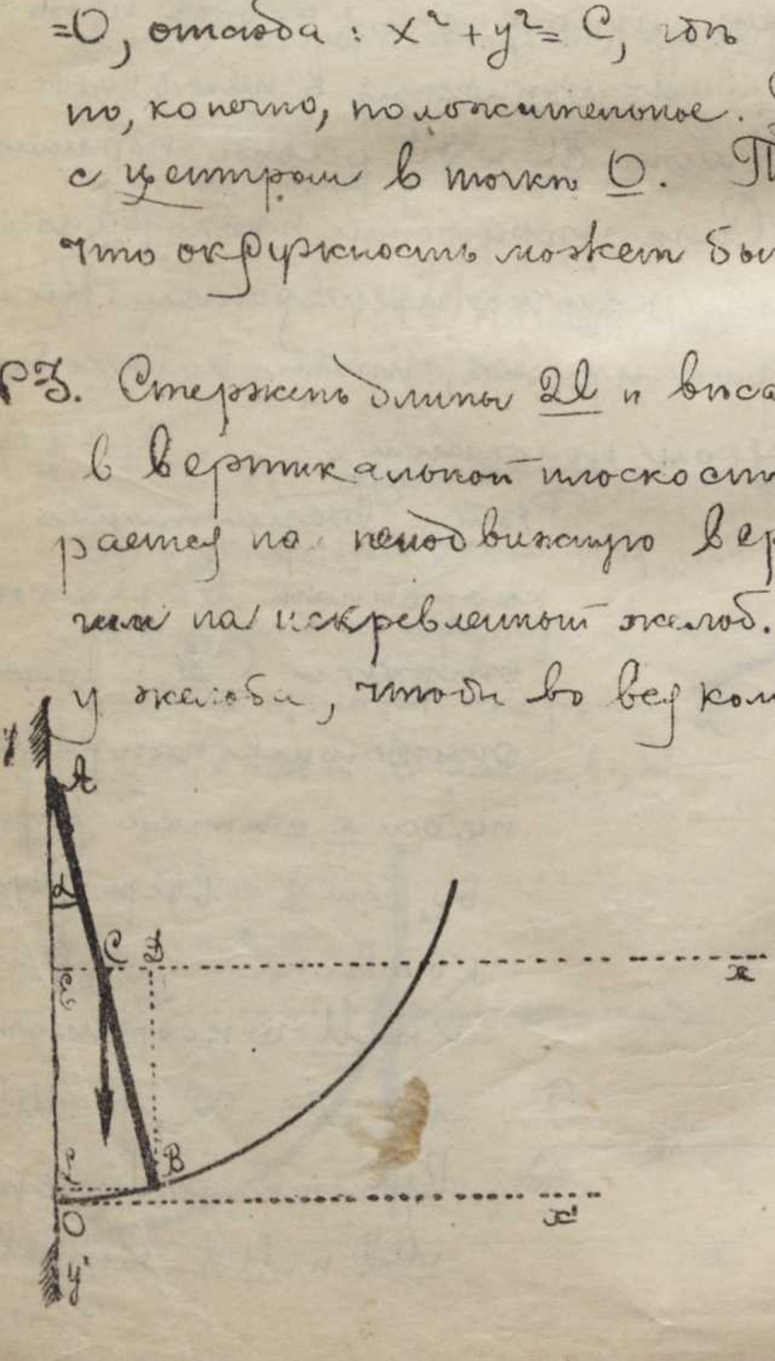
Реш. Пусть колечко находится в некоторой точке прута A с координатами X и Y. Эти координаты независимы друг от друга, и должны удовлетворять неизвестному ур. прута, которое пусть будет: $y = f(x)$. На колечко действуют сила тяжести $Y = -mg$ и центробежная сила $X = m\omega^2 x$. Пишем ур. Лагранжа: $X\delta x + Y\delta y = 0$, т. е.: $m\omega^2 x\,\delta x - mg\,\delta y = 0$. Из ур. прута имеем: $\delta y = f'(x)\cdot\delta x$, а потому получим: $m\omega^2 x\cdot\delta x - mg\cdot f'(x)\,\delta x = 0$; сократив, получим: $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$; $y = f(x) = \int\frac{\omega^2 x}{g}dx = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$. При выбранной системе координат, при $x = 0$ и $y = 0$; следов. $C = 0$, а потому $y = f(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$. Это и есть ур. прута, который представляет собой параболу.

№2. AB есть изогнутый неподвижный прут, по которому движется колечко; к колечку привязаны 2 совершенно одинаковых резины, продернутые сквозь неподвижные колечки C и D и закрепленные в неподвижных точках E и F. Длины EC и DF равны нормальным длинам резины. Сила упругости пропорциональна удлинению. Весом колечка пренебрегаем. Какова должна быть форма прута, чтобы колечко было в равновесии при всяком положении.



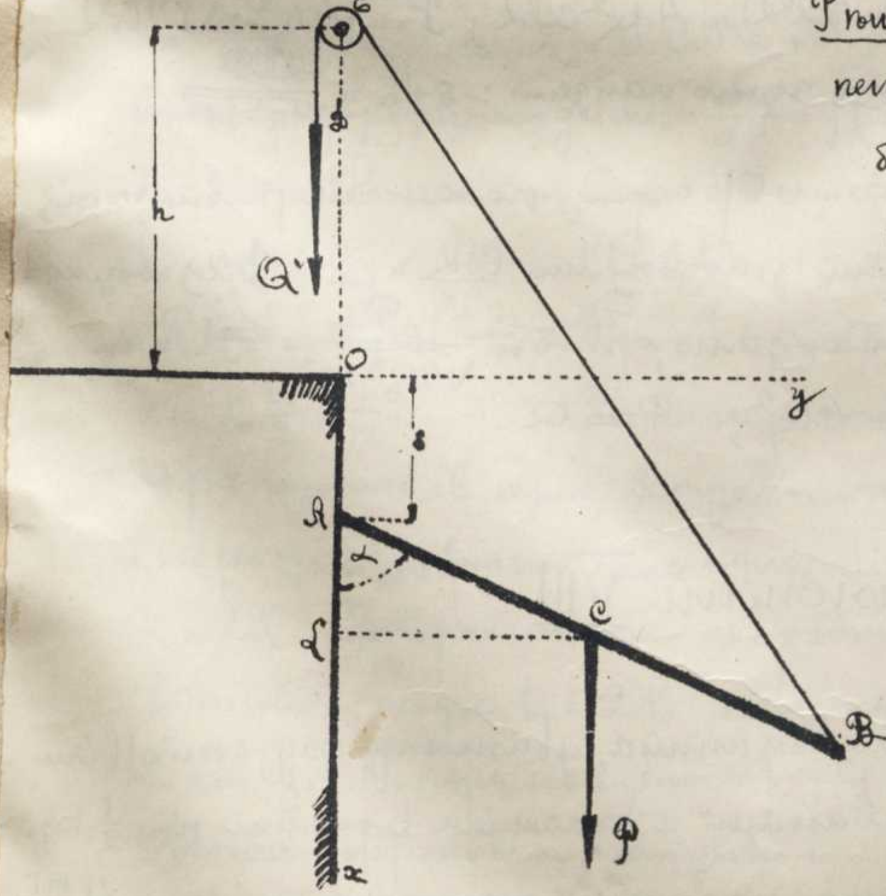
Реш. Берем начало координат в средине отрезка CD. Положительное направление оси x считаем вправо, оси y — вверх. Пусть колечко находится в точке M с координатами $x = -OL$, $y = ML$. Вытяжки резины суть MD и MC. Следоват., на колечко действуют 2 силы: сила $P_1 = K \cdot MD$ и $P_2 = K \cdot MC$ (K - коэфф. пропорциональности). Проекции их будут: $X_1 = пр_x(K \cdot MD) = K \cdot пр_x MD = K \cdot LD = K(OD+OL) = K(a-x)$; $X_2 = -пр_x(K \cdot MC) = -K \cdot пр_x(MC) = -K \cdot CL = -K(CO-OL) = -K(a+x)$; $Y_1 = -K \cdot пр_y MD = -K \cdot ML = -Ky$; $Y_2 = Y_1$. Уравн. Лагранжа имеет вид: $X_1 \cdot \delta x + X_2 \cdot \delta x + Y_1 \cdot \delta y_1 + Y_2 \cdot \delta y_1 = 0$; $(X_1+X_2)\delta x + 2Y_1 \cdot \delta y = 0$. Подставив значения X_1, X_2, Y_1, получим: $-2kx \cdot \delta x - 2ky \cdot \delta y = 0$; или так: $2x \cdot \delta x + 2y \cdot \delta y = 0$ (I) если ур. прута, будет: $y = f(x)$, то $\delta y = f'(x) \cdot \delta x$, а потому ур. (I) примет вид: $2x \cdot \delta x + 2y \cdot f'(x) \cdot \delta x = 0$; $2x + 2y \cdot f'(x) = 0$; вместо $f'(x)$ подставляем $\frac{dy}{dx}$, то есть: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$; $2xdx + 2ydy = 0$. Но $2xdx = d(x^2)$, а $2ydy = d(y^2)$; след., $d(x^2) + d(y^2) = 0$ или $d(x^2+y^2) = 0$, откуда: $x^2+y^2 = C$, где произвольное постоянное, но, конечно, положительное. Это есть ур. окружности с центром в точке O. Произвольность C показывает, что окружность может быть какого-угодно радиуса.

№3. Стержень длины $2l$ и веса P может перемещаться в вертикальной плоскости. Одним концом он опирается на неподвижную вертикальную стенку, а другим на искривленный желоб. Какая форма должна быть у желоба, чтобы во всяком положении было равновесие.



Реш. Выбираем сначала систему координат yOx'. На стержень AB действует вес P и силы реакции стенки и желоба. Полагая, как нормальные к элементам пути, работы не дадут; остается одна сила $Y = -P$. Уравн. Лагранжа примет вид: $Y.\delta\bar{y} = 0$; или: $-P.\delta\bar{y} = 0$, где $\bar{y}$ - есть координата точки $\underline{C}$, центра тяжести стержня $\underline{AB}$. Так как $P \neq 0$, то получаем $\delta\bar{y} = 0$ и след. $\bar{y} = C_1$, где $\underline{C_1}$ есть нѣкоторая постоянная. След., точка $\underline{C}$ - средина $\underline{AB}$, должна оставаться на прямой $\underline{\mathcal{E}x}$, параллельной оси $\underline{Ox'}$; при этом условіи при любом положеніи стержня будет равновѣсіе. Легко видѣть, что точка $\underline{B}$ должна будет описать эллипс. Дѣйствительно, выберем систему коорд. $\underline{y'\mathcal{E}x}$; тогда для точки $\underline{B}$ имѣем: $x = BL = AB.\sin\alpha = 2l\sin\alpha$; $y = BY = BC.\sin(90-\alpha) = l\cos\alpha$; или: $\frac{x}{2l} = \sin\alpha$; $\frac{y}{l} = \cos\alpha$, откуда находим: $\frac{x^2}{4l^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$, т.е. уравн. эллипса. Итак, желоб имѣет форму эллипса.

4. Стержень $\underline{AB}$ длины $\underline{2l}$ и вѣса $\underline{P}$, опирается концом $\underline{A}$ на гладкую стѣну; к концу $\underline{B}$ прикрѣплена нить, перекинутая через небольшой блок и обремененная грузом $\underline{Q}$. Опредѣлить положеніе равновѣсія.



Рѣш. Система имѣет 2 степени свободы; параметрами будут служить разстояніе $AO = s$ и угол $\underline{\alpha}$. Выбираем систему координат, как указано на чертежѣ. Для силы $\underline{P}$ имѣем: $X_1 = P$; $Y_1 = 0$. Координата же ея точки приложенія будет: $x_1 = OL = s + l\cos\alpha$. Для силы $\underline{Q}$ имѣем: $X_2 = -Q$; $Y_2 = 0$; $x_2 = -OD = -(OE - DE) =$

$= -(h - DE) = DE - h$. Если длину всей нити назовем через $\underline{a}$, то $DE = a - BE = a - \sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}$; слѣд., $x_2 = DE - h = a - h - \sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}$; Ур. Лагранжа: $X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 = 0$. Мѣняем сначала параметр $\underline{S}$; тогда мы будем имѣть: $\delta x_1 = \delta S$; $\delta x_2 = -\dfrac{h + S + 2lCs\alpha}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}}\delta S$ и ур. примет вид: $P.\delta S - Q \cdot \dfrac{h + S + 2lCs\alpha}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}}\delta S = 0$, откуда $P - Q\dfrac{h + S + 2lCs\alpha}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}} = 0$ (I)

Мѣняем теперь параметр $\underline{\alpha}$; тогда будем имѣть: $\delta x_1 = -lSn\alpha . \delta\alpha$; $\delta x_2 = \dfrac{2l(S+h)Sn\alpha}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}}\delta\alpha$. Ур. Лагранжа, по сокращеніи на $\underline{\delta\alpha}$ примет вид: $-PlSn\alpha + Q \cdot \dfrac{2l(S+h)Sn\alpha}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}} = 0$ или: $\left[P - Q \cdot \dfrac{2(S+h)}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}}\right] lSn\alpha = 0$. Если сдѣлаем $lSn\alpha = 0$, то есть: $Sn\alpha = 0$ и $\alpha = 0$, тогда из ур. (I) найдем, что $P = Q$. При этом условіи рѣшеніе $\alpha = 0$ возможно, вообще же оно невозможно и $2^{ое}$ ур. будет: $P - Q \cdot \dfrac{2(S+h)}{\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha}} = 0$ (II).

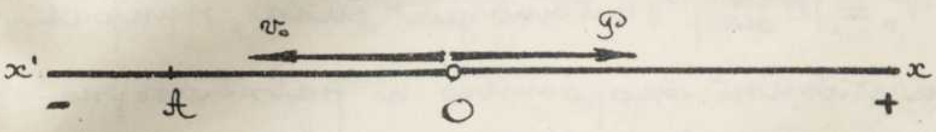
Из ур. (I) и (II) находим: $h + S + 2lCs\alpha = 2(S+h)$; слѣд., $S + h = 2lCs\alpha$; но тогда найдем, что $\sqrt{(S+h)^2 + 4l^2 + 4l(S+h)Cs\alpha} = \sqrt{12l^2Cs^2\alpha + 4l^2} = 2l\sqrt{1 + 3Cs^2\alpha}$ и из ур. $I^{го}$ или $II^{го}$ найдем

$P = Q \cdot \dfrac{2Cs\alpha}{\sqrt{1 + 3Cs^2\alpha}}$; $P^2(1 + 3Cs^2\alpha) = 4Q^2Cs^2\alpha$; $P^2 = (4Q^2 - 3P^2)Cs^2\alpha$ и $Cs\alpha = \dfrac{P}{\sqrt{4Q^2 - 3P^2}}$; послѣ этого найдем: $S + h = \dfrac{2lP}{\sqrt{4Q^2 - 3P^2}}$ и

$S = \dfrac{2Pl}{\sqrt{4Q^2 - 3P^2}} - h$. Таким образом, положеніе равновѣсія опредѣлено найденными значеніями $\underline{Cs\alpha}$ и $\underline{S}$. Для возможности задачи необходимо, чтобы $\dfrac{P}{\sqrt{4Q^2 - 3P^2}} \leq 1$ или $P^2 \leq 4Q^2 - 3P^2$; $4P^2 \leq 4Q^2$; $P \leq Q$.

Упражненіе VIII.

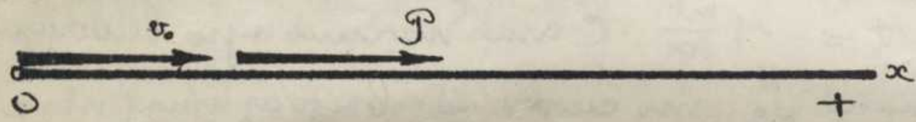
№1. Точка, массы равной единицѣ, движется под дѣйствіем силы, равномѣрно убывающей с теченіем времени на $\frac{1}{2}$ kg. в 1 sec. Точкѣ сообщена начальная скорость, равная $4\,\frac{mt.}{sec}$ и направленная прямо противоположно силѣ. Опредѣлить какова была величина P_0 силы в начальный момент и найти время и мѣсто остановки точки, если извѣстно, что сила перестала дѣйствовать как раз в тот момент, когда точка остановилась.



Рѣш. Пусть точка движется по прямой xx'. За начало координат выбираем ту точку прямой, в которой матер. точка находилась при началѣ движенія. Направленіе вправо будем считать положительным, влѣво отрицательным. Пусть сила направлена вправо, тогда начальная скорость будет направлена влѣво и, слѣд., $v_0 = -4\frac{mt}{sec}$. Если начальную величину силы назовем через P_0, то сила P выразится так: $P = P_0 - \frac{1}{2}t$. Начало счета времени считаем момент, когда точка находилась в O. Ур. движенія имѣет вид: $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$; здѣсь $X = P.\cos 0^\circ = +P$; $m = 1$; слѣд., $P_0 - \frac{1}{2}t = \frac{d^2x}{dt^2}$; интегрируя, находим: $\frac{dx}{dt} = \int\left(P_0 - \frac{1}{2}t\right)dt = P_0 t - \frac{1}{4}t^2 + C$. $\frac{dx}{dt} = v$. В началѣ, при $t = 0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 = -4$; слѣд., $C = -4$, а потому $\frac{dx}{dt} = P_0 t - \frac{1}{4}t^2 - 4$; откуда $x = \int\left(P_0 t - \frac{1}{4}t^2 - 4\right)dt = P_0\frac{t^2}{2} - \frac{1}{12}t^3 - 4t + C_1$. При $t = 0$, $x = 0$; слѣд., $C_1 = 0$, то есть $x = P_0\frac{t^2}{2} - \frac{1}{12}t^3 - 4t$. Сила перестала дѣйствовать, т.е. обратилась в нуль, когда точка остановилась, т.е. скорость обратилась нуль. Приравниваем P нулю: $P_0 - \frac{t}{2} = 0$, $t = 2P_0$. Приравниваем скорость нулю: $P_0 t - \frac{1}{4}t^2 - 4 = 0$. Вставляя сюда $t = 2P_0$, получим: $2P_0^2 - P_0^2 - 4 = 0$; $P_0^2 = 4$; $P_0 = 2$ кг. Теперь найдем время остановки: $T = 2P_0 = 4$ сек. Мѣсто остановки найдем из выраж. для X, вставив $t = 4$, а $P_0 = 2$; тогда мы получим: $X = 16 - \frac{16}{3} - 16 = -\frac{16}{3}$ mt; знак минус показывает, что точка остановилась налѣво от O, в точкѣ $\underline{A}$, на разстояніи $OA = -5\frac{1}{3}$. Итак, начальная сила $P_0 = 2$кг.; точка остановилась через $T = 4$ sec. от начала движенія на разстояніи $5\frac{1}{3}$ mt. влѣво от начальнаго движенія.

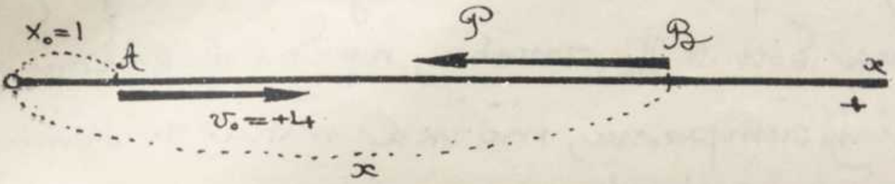
№2. На точку, массы равной 2^m, находившуюся в начальный момент в началѣ координат и имѣвшую начальную скорость $v_0 = 10\frac{mt}{sec}$, дѣйствует сила, направленная одинаково с начальной скоростью и равномѣрно-возрастающая на $\underline{a}$ кг. в 1 sec. Начальная величина силы $P_0 = 4$ кг. Из наблюденій извѣстно, что на разстояніи 450 mt. от начальнаго положенія скорость точки $= 105\frac{mt}{sec}$. Опредѣлить величину $\underline{a}$.

Отв. $a = 3$.



Рѣш. Согласно условію задачи, сила $\underline{P}$ выразится так: $P = 4 + at$; берем ур: $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$; здѣсь $X = +P$; $m = 2$; слѣд., $2\frac{d^2x}{dt^2} = 4 + at$; интегрированіе дает: $2\frac{dx}{dt} = 4t + \frac{at^2}{2} + C$; при $t = 0$; $\frac{dx}{dt} = v_0 = 10$; слѣд., $2.10 = C$; $C = 20$ и так. образом $2\frac{dx}{dt} = 4t + \frac{at^2}{2} + 20$ (I). Второе интегрированіе дает: $2x = 2t^2 + \frac{at^3}{6} + 20t + C_1$; при $t = 0, x = 0$; слѣд., $C_1 = 0$, а потому: $2x = 2t^2 + \frac{at^3}{6} + 20t$ (II). Когда $\underline{x}$ равнялось 450 mt, то скорость $\frac{dx}{dt}$ равнялась $105\frac{mt}{sec}$. Положим это было во время $t = T$, тогда из ур. (I) и (II) находим: 1) $210 = 4T + \frac{aT^2}{2} + 20$; 2) $900 = 2T^2 + \frac{at}{6} + 20T$, или: 1) $aT^2 + 8T - 380 = 0$, 2) $aT^3 + 12T^2 + 120T - 5400 = 0$. Умножая 1е на $\underline{T}$ и вычитая из 2го, получим: $4T^2 + 500T - 5400 = 0$; $T^2 + 125T - 1350 = 0$. Рѣшаем это ур.: $T = \frac{-125 + \sqrt{125^2 + 5400}}{2} = \frac{-125 \pm 145}{2}$; $T = 10$ (2е рѣш. отрицательное, очевидно, не годится). Вставляя значеніе $\underline{T}$ в ур. 1е, найдем $\underline{a}$; $a.10^2 + 8.10 - 380 = 0$; $a = 3$.

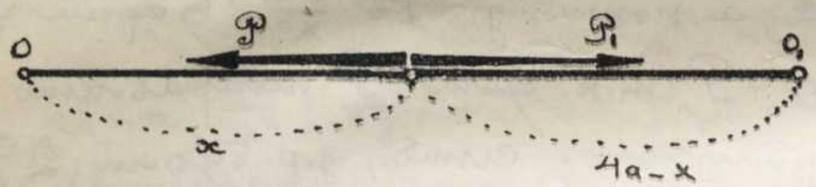
№3 Точка, массы, равной $2^{м}$, движется по оси x подъ дѣйствіем силы, обратнопропорціональной кубу разстоянія от начала координат и притягивающей ее к этому началу. Опредѣлить положеніе точки в концѣ $1^{й}$ sec. от начала движенія, по слѣдующим данным: начальное разстояніе $x_0=1$; начальная скорость $v_0=+4$; когда $x=2$, сила притяженія $=4$. Найти также: вернется ли точка к притягивающему центру?



Рѣш. Составим выраженіе для силы P. Если точка находится в B на разстояніи x от O, то сила выразится так: $P=\frac{K}{x^3}$, гдѣ K - коэффиц. пропорціональности. По условію, когда $x=2$, сила $P=4$; слѣд., $4=\frac{K}{2^3}$; $K=32$, а потому $P=\frac{32}{x^3}$. Берем ур. $X=m\frac{d^2x}{dt^2}$; $m=2$, $X=-P$, т.к. сила P направлена в отрицательную сторону оси; слѣд., ур. будет: $2\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{32}{x^3}$; $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{16}{3}$. Но $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}$; слѣд., $v\frac{dv}{dx}=-\frac{16}{x^3}$; $v\,dv=-\frac{16}{x^3}dx$; $\int v\,dv=\int-\frac{16}{x^3}dx$; $\frac{v^2}{2}=\frac{8}{x^2}+C$; при $x=x_0=1$; $v=v_0=4$; слѣд., $\frac{4^2}{2}=\frac{8}{1^2}+C$; $C=0$; так. образом: $\frac{v^2}{2}=\frac{8}{x^2}$; $v^2=\frac{16}{x^2}$; $v=+\frac{4}{x}$. Мы берем плюс, так как скорость >0, при $x>0$. Но $v=\frac{dx}{dt}$, слѣдов., $\frac{dx}{dt}=\frac{4}{x}$; $x\,dx=4\,dt$; $\int x\,dx=\int 4\,dt$; $\frac{x^2}{2}=4t+C_1$; когда $t=0$; $x=x_0=1$ слѣд., $\frac{1}{2}=C_1$, а потому $\frac{x^2}{2}=4t+\frac{1}{2}$; сдѣлав $t=1$, найдем, что $x^2=9$; $x=3$. Это будет положеніе точки в концѣ $1^{й}$ секунды. Чтобы точка вернулась к центру, необходимо, чтобы скорость в какой-нибудь точкѣ обратилась в нуль, а потом она должна двигаться назад; но из равенства $v^2=\frac{16}{x^2}$ видим, что v будет нуль только тогда, когда $x=\infty$; слѣд., точка удалится в безконечность, и, значит, она не вернется к центру.

№4. 2 одинаковых неподвижных центра притягивают материальную точку с силами обратно пропорціональными квадратам разстояній. Оба центра точку, с массой равной 1-цѣ, на разстояніи, равном 1-цѣ, притягивают с силой K. В начальный момент точка находилась на линіи соединенія центров втрое ближе к одному из них, чѣм к другому и обладала нѣкоторой скоростью v_0, направленной к отдаленному центру. Какова должна быть v_0, чтобы, придя в средину разстоянія между центрами, точка там и осталась. Все разстояніе $OO_1 = 4a$.

Отв. $v_0 = \sqrt{\frac{2K}{3a}}$



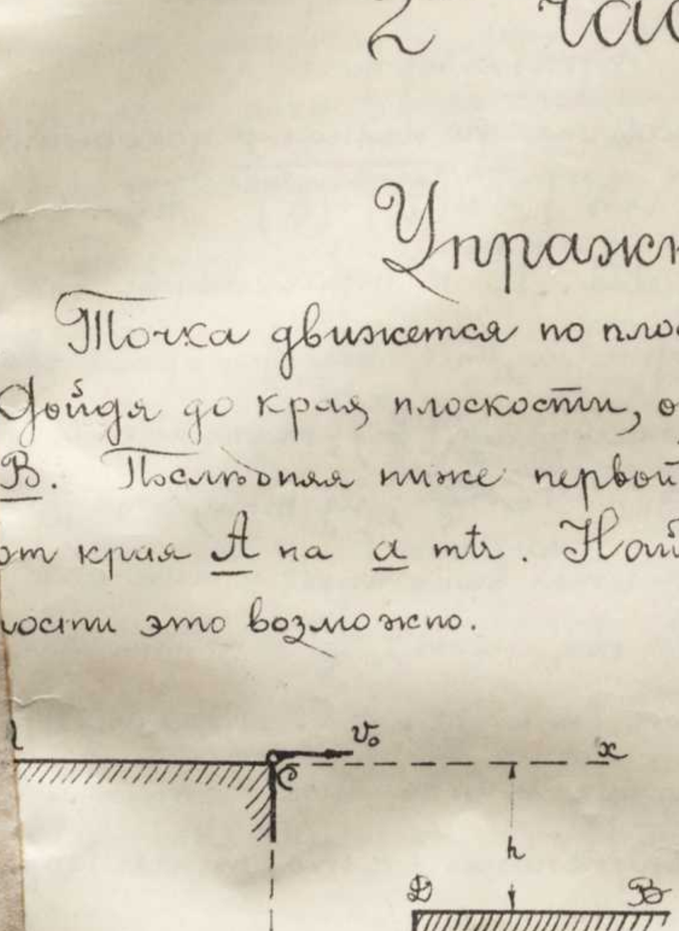
Реш. Начало координат выберем в O; положительным будем считать направленіе от O к O_1. Возьмем какую-нб. точку A на разстояніи $OA = x$. На нее дѣйствуют 2 силы: P влѣво и P_1 вправо; причем, по абсолютн. величинѣ $P = \frac{K}{x^2}$, $P_1 = \frac{K}{(4a-x)^2}$. Принимая же во вниманіе и знак, имѣем: $P = -\frac{K}{x^2}$, $P_1 = \frac{K}{(4a-x)^2}$. Равнодѣйствующая их $X = -\frac{K}{x^2} + \frac{K}{(4a-x)^2}$. Берем ур.: $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$; здѣсь $m = 1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$; слѣд., $v\frac{dv}{dx} = -\frac{K}{x^2} + \frac{K}{(4a-x)^2}$; $\int v\,dv = \int\left[-\frac{K}{x^2} + \frac{K}{(4a-x)^2}\right]dx$; $\frac{v^2}{2} = \frac{K}{x} + \frac{K}{4a-x} + C$. Когда $x = 2a$, то $v = 0$, так как в срединѣ, по условію, точка остановилась; слѣдов., $0 = \frac{K}{2a} + \frac{K}{2a} + C$; $C = -\frac{K}{a}$, а потому $\frac{v^2}{2} = \frac{K}{x} + \frac{K}{4a-x} - \frac{K}{a}$; при $x = a$, $v = v_0$; слѣд., получаем: $\frac{v_0^2}{2} = \frac{K}{a} + \frac{K}{3a} - \frac{K}{a}$; $v_0^2 = \frac{2K}{3a}$; $v_0 = \sqrt{\frac{2K}{3a}}$

Аналитическая механика

2^{я} часть.

Упражненіе I

1 Точка движется по плоскости $\underline{A}$ со скоростью $\underline{v_0}$. Дойдя до края плоскости, она перелетает на плоскость $\underline{B}$. Послѣдняя ниже первой на $\underline{h}$ mtr. и край ея удален от края $\underline{A}$ на $\underline{a}$ mtr. Найти при какой минимальной скорости это возможно.



Рѣш. Возьмем систему координат $\underline{xCy}$. В началѣ движенія точка находится в $\underline{C}$ и имѣет скорость, направленную по оси $\underline{x}$. Во время движенія на точку дѣйствует только сила тяжести: $Y = mg$, гдѣ $\underline{m}$ - масса матеріальной точки. Берем ур. дин.: $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = X$ и $m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = Y$. Так как $X = 0$, а $Y = mg$, то получаем: $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ или $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ ($\underline{I}$) и $m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = mg$ или $\frac{d^2y}{dt^2} = g$ ($\underline{II}$). Из ур.($\underline{I}$) имѣем: $\frac{dx}{dt} = C_1$; но в началѣ движенія скорость точки по оси $\underline{x}$ равна $\underline{v_0}$; слѣд., $C_1 = v_0$, т.е. $\frac{dx}{dt} = v_0$; откуда $x = v_0t + C_2$. В началѣ движенія (при $t=0$) $x=0$; слѣд., $C_2 = 0$, т.е. $x = v_0t$. Из ур. ($\underline{II}$) находим: $\frac{dy}{dt} = gt + C_3$. При $t=0$, скорость по оси $\underline{y}$ равна $\underline{0}$, т.е. $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0$; слѣдов., $C_3 = 0$, а потому $\frac{dy}{dt} = gt$; откуда

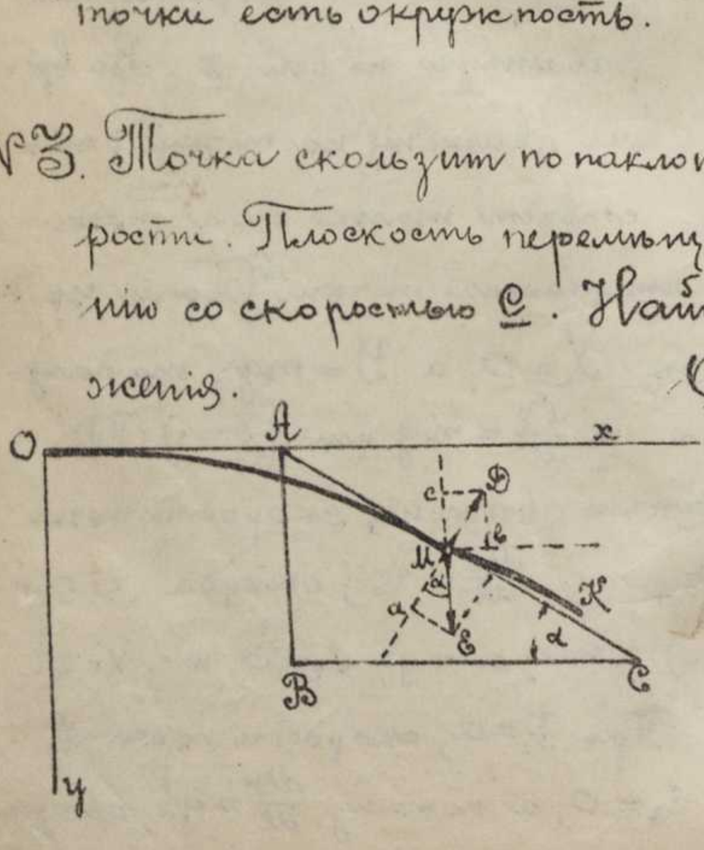
$y=\frac{gt^2}{2}+C_1$; при $t=0$, $y=0$, т.е. $C_1=0$. Итак, ур. движенія будут: 1) $x=v_0t$ и 2) $y=\frac{gt^2}{2}$. В точкѣ D $x=a$, $y=h$, слѣдов., $a=v_0t$ и $h=\frac{gt^2}{2}$. Из 1го ур. имѣем $t=\frac{a}{v_0}$; подставив во 2^е, получим: $h=\frac{g}{2}\left(\frac{a}{v_0}\right)^2$ или: $\left(\frac{v_0}{a}\right)^2=\frac{g}{2h}$ и $v_0=a\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

№2. Матеріальная точка движется так, что в каждый момент дѣйствующая на нее постоянная сила направлена $\perp^{но}$ к траекторіи. Найти вид траекторіи.

Рѣш. Сила всегда направлена по полному ускоренію и выражается так: $P=mj$, гдѣ $j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$. Так как, по условію, сила всегда направлена $\perp^{но}$ к траекторіи, то и ускореніе j направлено по нормали, т.е. все ускореніе сводится к одному центростремительному $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$, тангенціальное же ускореніе $\frac{dv}{dt}=0$. Итак, $j=\frac{v^2}{\rho}$ и $P=\frac{mv^2}{\rho}$; из того, что $\frac{dv}{dt}=0$, слѣдует также, что v = постоянной величинѣ, а так как, по условію, сила P - постоянна, то, слѣдов., $\frac{mv^2}{\rho}$ = постоянной величин. Отсюда слѣдует, что $\rho=const.$ (т.к. m и v - постоянны). Итак, кривизна траекторіи - $\frac{1}{\rho}$ = постоянн. величинѣ, а таким свойством обладает только окружность, - слѣд., траекторія точки есть окружность.

№3. Точка скользит по наклонной плоскости без начальной скорости. Плоскость перемѣщается по горизонтальному направленію со скоростью c. Найти траекторію абсолютнаго движенія.

Отв. $(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2=\frac{2c^2}{g}\cdot y$.

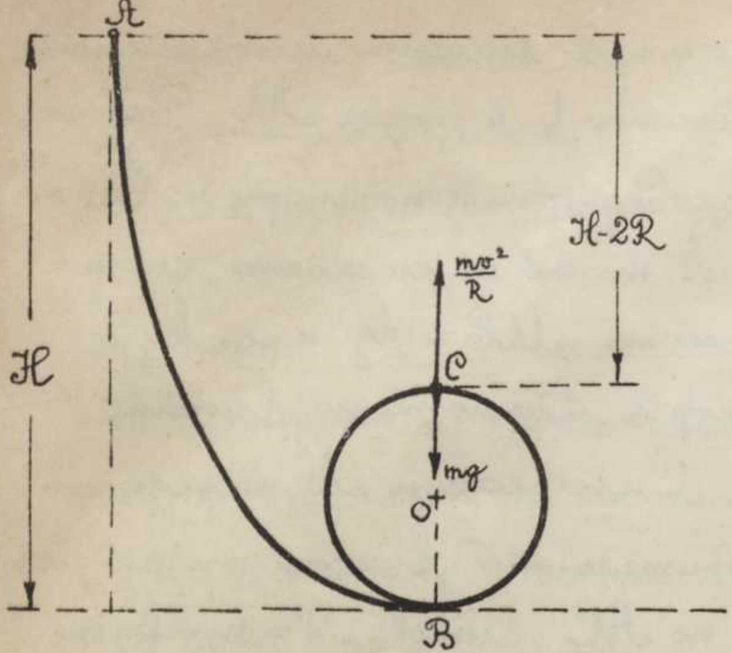


Рѣш. Пусть в начальный момент (при $t=0$) сторона AB наклонной плоскости совпадала с осью Oy, а во время t она заняла положеніе, указанное на чертежѣ, пройдя путь $OA = ct$. В начальный момент матеріальная точка находилась в $\underline{A}$, а в момент $\underline{t}$ в точкѣ $\underline{M}$. Переносное движеніе плоскости будет совершаться по инерціи. Относительное движеніе матеріальной точки по плоскости совершается под дѣйствіем силы тяжести $ME = mg$ и реакціи плоскости $MD = N$. Траекторія абсолютнаго движенія будет нѣкоторая кривая $\underline{OK}$. Сила реакціи $\underline{N}$ опредѣляется из того условія, что в относительном движеніи точка движется только вдоль плоскости по $\underline{AC}$; слѣдов., $N =$ проекціи силы тяжести на нормаль к плоскости, т.е. $N = Ma = mg\,\mathrm{Cs}\,\alpha$. Проектируя $\underline{N}$ на оси $\underline{x}$ и $\underline{y}$, получим $Mb = N\,\mathrm{Sn}\,\alpha = mg\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,\mathrm{Sn}\,\alpha$; $Mc = N\,\mathrm{Cs}\,\alpha = mg\,\mathrm{Cs}^2\alpha$; слѣдов., на точку $\underline{M}$ дѣйствуют силы: $X = mg\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha$ и $Y = mg - mg\,\mathrm{Cs}^2\alpha = mg\,\mathrm{Sn}^2\alpha$. Далѣе имѣем: $m\frac{d^2x}{dt^2} = X = mg\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha$ и $m\frac{d^2y}{dt^2} = Y = mg\,\mathrm{Sn}^2\alpha$, или 1) $\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha$ и 2) $\frac{d^2y}{dt^2} = g\,\mathrm{Sn}^2\alpha$. Из ур. 1° находим: $\frac{dx}{dt} = g\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,t + C_1$; при $t=0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c$; слѣдоват., $C_1 = c$, и потому $\frac{dx}{dt} = g\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,t + c$; интегрируя, получим: $x = \frac{g\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,t^2}{2} + ct + C_2$; при $t=0$, $x_0 = 0$; слѣд., $x = \frac{g}{2}\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,t^2 + ct$ ($\underline{\mathrm{I}}$); из ур. $\frac{d^2y}{dt^2} = g\,\mathrm{Sn}^2\alpha$ посредством интегрированія найдем: $\frac{dy}{dt} = g\,\mathrm{Sn}^2\alpha\,t + C_3$; при $t=0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0$; слѣд., $C_3 = 0$ и $\frac{dy}{dt} = g\,\mathrm{Sn}^2\alpha\,t$; откуда: $y = \frac{g\,\mathrm{Sn}^2\alpha\,t^2}{2} + C_4$; при $t=0$, $y_0 = 0$; слѣд., $y = \frac{g}{2}\cdot\mathrm{Sn}^2\alpha\,t^2$ ($\underline{\mathrm{II}}$). Из рав. ($\underline{\mathrm{I}}$) и ($\underline{\mathrm{II}}$) исключаем $\underline{t}$: $\left(x - \frac{g}{2}\,\mathrm{Sn}\,\alpha\,\mathrm{Cs}\,\alpha\,t^2\right)^2 = c^2t^2$; но $t^2 = \frac{2y}{g\,\mathrm{Sn}^2\alpha}$; слѣдоват., $\left(x - \frac{g}{2}\,\mathrm{Sn}\,\alpha\cdot\mathrm{Cs}\,\alpha\cdot\frac{2y}{g\,\mathrm{Sn}^2\alpha}\right)^2 = \frac{c^2\cdot 2y}{g\,\mathrm{Sn}^2\alpha}$; или $\left(x - y\frac{\mathrm{Cs}\,\alpha}{\mathrm{Sn}\,\alpha}\right)^2 = \frac{2c^2y}{g\,\mathrm{Sn}^2\alpha}$, или $(x\,\mathrm{Sn}\,\alpha - y\,\mathrm{Cs}\,\alpha)^2 = \frac{2c^2}{g}\cdot y$.

№4. Тяжелая точка скользит по нѣкоторой гладкой кривой с высоты $\underline{H}$, двигается затѣм по внутренней сторонѣ окружности (данная рад. $\underline{R}$), расположенной в вертикальной плоскости. Какова наименьшая высота $\underline{H}$, при которой точка может обойти окружность, не падая с нея?

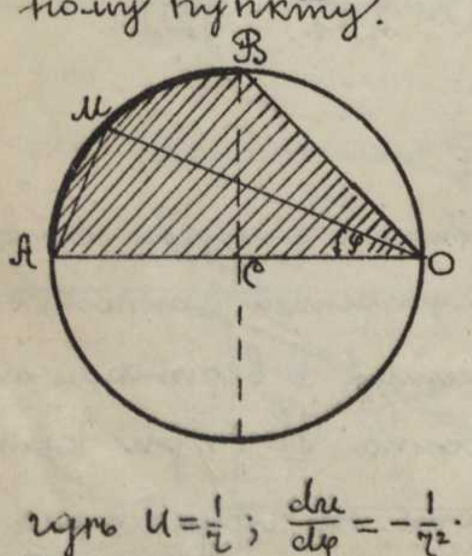
Отв. $H = \frac{5}{2}R$

Рѣш. Давленіе матеріальной точки на поверхность направ-



лено по нормали и = проекціи на эту нормаль движущей силы и центробѣжной силы инерціи $\frac{mv^2}{\rho}$. Для того, чтобы точка могла достигнуть точки C, не падая, необходимо, чтобы это давленіе, равное $\frac{mv^2}{R} - mg \geqslant 0$; в крайнем случаѣ оно равно 0; слѣд., $\frac{mv^2}{R} - mg = 0$, или $v^2 = Rg$ (I). v^2 найдем из интеграла живых сил. Точка при движеніи от A до C под вліяніем силы тяжести совершила работу $= mg(H-2R)$ и пріобрѣла живую силу $\frac{mv^2}{2}$; слѣдов., $\frac{mv^2}{2} = mg(H-2R)$; откуда $v^2 = 2g(H-2R)$; подставив в ур. (I), получим: $2g(H-2R) = Rg$, или $2H = 5R$ и $H = \frac{5}{2}R$.

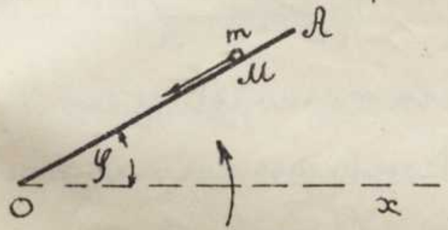
№5. Точка под дѣйствіем центральной силы описала дугу окружности (рад. = 4), проходящей через центр дѣйствующей силы. Длина дуги оказалась $= \frac{1}{4}$ окружности. Время пробѣга 8 сек. Исходное положеніе точки — конец діаметра, противоположный центру силы. Опредѣлить, с какой начальной скоростью двигалась точка и с какой она пришла к конечному пункту. Отв. $v_0 = \frac{\pi+2}{8}$; $v_1 = \frac{\pi+2}{4}$.



Рѣш. Пусть O есть центр силы, OM — радіус вектор $= r$, $\angle AOM = \varphi$. Уравн. траекторіи точки, т. е. дуги AMB в полярных координатах выразится так: $OM = OA . \cos AOM$, т. е., $r = 8\cos\varphi$. По формулѣ Бине имѣем: $v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$, гдѣ $u = \frac{1}{r}$; $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$; слѣдов., $v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] = \frac{c^2}{r^2}\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]$. Подставив $r = 8\cos\varphi$, $\frac{dr}{d\varphi} = -8\sin\varphi$, получим: $v^2 = \frac{c^2}{64\cos^2\varphi}\left[1 + tg^2\varphi\right] = \frac{c^2}{64\cos^4\varphi}$, а потому $v = \frac{c}{8\cos^2\varphi}$; в началѣ движенія $\varphi = 0$, слѣд.,

$v_0 = \frac{C}{8}$; в концѣ $\varphi = \angle AOB = 45°$, слѣд., $v_1 = \frac{C}{4}$. Опредѣлим значеніе постоянной C. Как извѣстно из Аналит. мех. $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{C}{2}$, гдѣ $\frac{d\sigma}{dt}$ – секторальная скорость. Интегрируя, получим: $\sigma = \frac{C}{2}t + C_1$; при $t = 0$, $\sigma = 0$, а потому $C_1 = 0$, т.е. $\sigma = \frac{C}{2}t$. Откуда: $C = \frac{2\sigma}{t}$. Но $t = 8$ sec. σ = площ. $AMBO = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 4\pi + 8$. Подставив, получим: $C = \frac{8\pi + 16}{8} = \pi + 2$. Слѣд., $v_0 = \frac{C}{8} = \frac{\pi + 2}{8}$, $v_1 = \frac{C}{4} = \frac{\pi + 2}{4}$.

№6. Вдоль прямой OA, вращающейся вокруг неподвижнаго центра, движется точка M, разстояніе которой от центра O опредѣляется формулой $r = 20 - \frac{t}{10}$. Какова должна быть зависимость между угловой скоростью прямой от времени, если извѣстно, что абсол. ускореніе точки m все время проходит через точку O и при $t = 0$, $\omega = \frac{1}{10}$. Отв. $\omega = \frac{40}{(20 - \frac{t}{10})^2}$

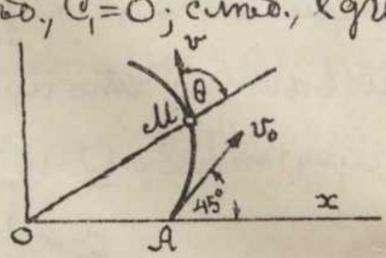


Рѣш. Пусть в данный момент t прямая OA образует с полярной осью угол φ. Тогда $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Так как полное ускореніе проходит все время через точку O, то движеніе совершается под вліяніем центральной силы из центра O. Для таких сил имѣем формулу $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$; слѣд., $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{C}{r^2}$. Но $r = 20 - \frac{t}{10}$, слѣд., $\omega = \frac{C}{(20 - \frac{t}{10})^2}$. При $t = 0$, $\omega_0 = \frac{C}{20^2} = \frac{C}{400}$; но $\omega_0 = \frac{1}{10}$, а потому $\frac{1}{10} = \frac{C}{400}$, или $C = 40$; так. образом $\omega = \frac{40}{(20 - \frac{t}{10})^2}$.

№7. Матер. точка движется так, что в каждой точкѣ пути скорость ея обратно пропорціональна 1-й степени разстоянія ея до нѣкотораго ея центра притяженія. Найти траекторію ея, полагая, что в началѣ движенія при $t = 0$ точка находится от центра на разстояніи = единицѣ и скорость ея образует $\angle 45°$ с осью x системы координат, имѣющей начало в центрѣ. Отв. $r = e^{\varphi}$

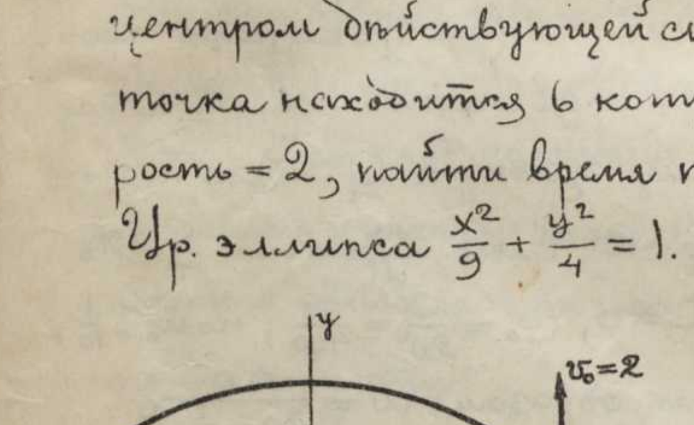
Рѣш. Скорость v, по условію, может быть выражена так:

$v=\frac{k}{r}$, гдѣ $\underline{k}$ — факторъ пропорціональности. По формулѣ Бине имѣемъ: $v^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$; но $v^2=\frac{k^2}{r^2}=k^2u^2$; слѣд., $k^2u^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$ (I). При $t=0$, точка находится въ $\underline{A}$ на оси $\underline{x}$, причемъ, $OA=r_0=1$. Далѣе мы знаемъ изъ Аналит. мех., что $\operatorname{tg}\theta=\frac{r\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=r\cdot\frac{d\varphi}{dr}=\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$. При $t=0$, $\theta=45^\circ$ и $r_0=1$, слѣд., $1=\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0}$ или $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0=1$. Но $\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}$; при $r=1$ и $u=\frac{1}{r}=1$; слѣд., $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0=-\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0=-1$. Изъ рав. (I), при $t=0$, находимъ: $k^2=c^2(1+1)=2c^2$; слѣд., рав. (I) приметъ видъ: $2c^2u^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$, или $2u^2=u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$, или же $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=u^2$; откуда: $\frac{du}{d\varphi}=\pm u$. Здѣсь надо взять знакъ (−), т. к., при $u=u_0=1$, $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0=-1$. Итакъ, $\frac{du}{d\varphi}=-u$. Раздѣляемъ перемѣнныя: $\frac{du}{u}=-d\varphi$; $\int\frac{du}{u}=-\int d\varphi$; $\lg u=-\varphi+C_1$; при $\varphi=0$, $u=u_0=1$, $\lg u_0=0$; слѣд., $C_1=0$; слѣд., $\lg u=-\varphi$; $u=e^{-\varphi}$ или: $\frac{1}{r}=\frac{1}{e^{\varphi}}$, откуда $r=e^{\varphi}$



Упражненіе II.

№1. Точка, находясь подъ дѣйствіемъ нѣкоторой центральной силы, описываетъ эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ дѣйствующей силы. Зная, что въ начальный моментъ точка находится въ концѣ большой оси и что начальная скорость $=2$, найти время полнаго оборота точки по кривой.
Ур. эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Отв. $T=2\pi$.



Рѣш. Такъ какъ движеніе совершается подъ дѣйствіемъ центральной силы, то (какъ извѣстно изъ Аналит. мех.) секторальная скорость есть величина постоянная, т. е. $\frac{d\sigma}{dt}=\frac{c}{2}$ и $\sigma=\frac{c}{2}\cdot t$. При полномъ оборотѣ точка опишетъ эллипсъ, площадь котораго будетъ: $\sigma=\pi\cdot ab$ ($\underline{a}$ и $\underline{b}$ — полуоси эллипса). Въ данномъ случаѣ имѣемъ: $a=3$, $b=2$; слѣд., $\sigma=6\pi$ и мы получимъ: $6\pi=\frac{c}{2}\cdot t$, или $t=T=\frac{12\cdot\pi}{c}$. Опредѣлимъ значеніе постоянной $\underline{c}$. Мы имѣемъ: $v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ и $\cos\alpha=\frac{\frac{dx}{dt}}{v}$, $\cos\beta=\frac{\frac{dy}{dt}}{v}$. Въ началѣ движенія $\alpha=90^\circ$, $\beta=0$; слѣдов.,

$\cos\alpha_0 = 0$ и $\cos\beta_0 = 1$, т.е. $\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0}{2} = 0$ или $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$ и $\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0}{2} = 1$ или $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 2$. Секторальная скорость в декартовых координатах выражается так: $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{dy}{dt} - y\cdot\frac{dx}{dt}\right)$. Для начальнаго момента будем имѣть: $x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - y_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c$. Но $x_0 = a = 3$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 2$, $y_0 = 0$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$; слѣд., $c = 3.2 = 6$. Подставив в формулу $T = \frac{12\pi}{c}$, получим: $T = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$.

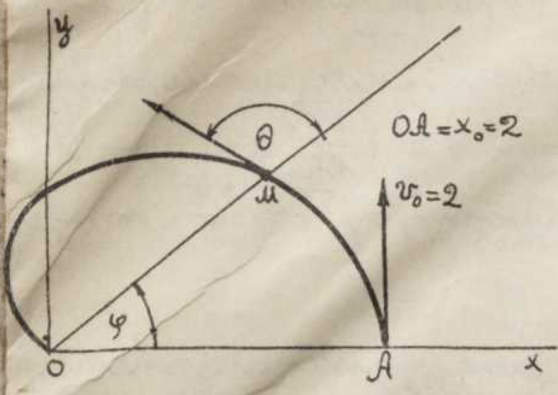
№ 2. По какому закону центральная сила должна дѣйствовать, чтобы точка описала логарифмическую спираль $r = A.e^{k\varphi}$ с полюсом в центрѣ силы. Отв. $P = -\frac{c^2(1+k^2)m}{r^3}$.

Рѣш. Берем 2ю формулу Бине: $\frac{P}{m} = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$, гдѣ $u = \frac{1}{r}$. В данном случаѣ $u = \frac{1}{A.e^{k\varphi}} = \frac{1}{A}.e^{-k\varphi}$. Диффиренцируя, получим: $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{k}{A}.e^{-k\varphi}$; $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{k^2}{A}.e^{-k\varphi} = k^2.\frac{1}{A.e^{k\varphi}} = k^2.u$. Подставив в формулу Бине, получим: $\frac{P}{m} = -c^2u^2(u + k^2u) = -c^2u^3(1+k^2) = -\frac{c^2(1+k^2)}{r^3}$ и, слѣд., $P = -\frac{c^2(1+k^2)m}{r^3}$.

№ 3. Какая центральная сила может заставить точку двигаться по спирали $r\varphi = 2$, удаляясь от полюса спирали, совпадающаго с центром силы, если при $\varphi = 1$ скорость точки = двум. Отв. $\frac{P}{m} = -\frac{8}{r^3}$

Рѣш. Берем 2ю формулу Бине: $\frac{P}{m} = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$, гдѣ $u = \frac{1}{r}$. Из ур. спирали находим: $r = \frac{2}{\varphi}$, слѣдов., $u = \frac{1}{r} = \frac{\varphi}{2}$. Диффиренцируя получим: $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2}$; $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0$. Вторая форм. Бине, так. образом, примет вид: $\frac{P}{m} = -c^2u^3 = -\frac{c^2}{r^3}$ (I). Опредѣлим значение c^2. Берем для этого 1ю форм. Бине: $v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$. При $\varphi = 1$ будем имѣть $u = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2}$; v, по условию, равно 2м. Подставив в 1ю форм. Бине, получим: $2^2 = c^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right]$; откуда $c^2 = 8$. Подставляя найденное значение c^2 в ур. (I), получим: $\frac{P}{m} = -\frac{8}{r^3}$; $P = -\frac{8m}{r^3}$.

№ 4. Точка, имѣющая начальныя координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ и начальную скорость v_0, ||ую оси y и равную 2м, находится под дѣйствием притягивающаго центра силы, обратно пропорціональной 4й степени разстоянія. Центр силы в началѣ коорд. Зная, что в начальный момент сила = $3m$, опредѣлить траекторію точки. Отв. $r = 1+\cos\varphi$.

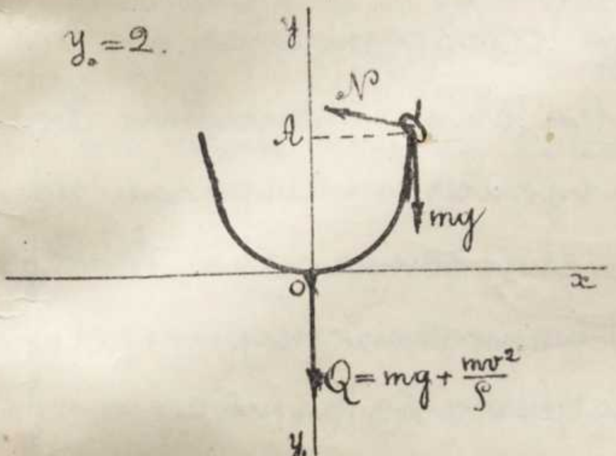


Рѣш. Сила, по условію, обратно пропорц. 4^й степ. разстоянія, слѣд., она может быть выражена так: $P = \frac{km}{r^4}$, гдѣ m — масса матеріальной точки, а k — коэфф. пропорціональности. В началѣ движенія $r = OA = 2$ и $P = 3m$, слѣд., $3m = \frac{km}{16}$, и мы найдем, что $k = 48$, а потому $P = \frac{48m}{r^4}$ или $\frac{P}{m} = \frac{48}{r^4} = 48u^4$ $(u = \frac{1}{r})$. Возьмем 2^ю форм. Бинэ: $\frac{P}{m} = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$. В нее вставим найденное знач. $\frac{P}{m}$ и со знаком (−), т.к. форм. Бинэ выведена для отталкивающей силы, наша же сила притягивающая, а потому она считается отрицательной, т.е. $\frac{P}{m} = -48u^4$. Вставляем в форм. Бинэ: $-48u^4 = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$, или $48u^2 = c^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$ (I). Для опред. c^2 обратимся к 1^й форм. Бинэ: $v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$. Но $u = \frac{1}{r}$, а потому $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$. Если же обозначим через θ угол между направленіем скорости точки и рад.-вектором, то будем имѣть слѣд. формулу: $\operatorname{tg}\theta = \frac{r\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}}$ (см. Ан. мех. стр. 5), или же, умножив числит. и знаменат. на dt, слѣдующую: $\operatorname{tg}\theta = r\cdot\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$. В начальный момент при $\varphi = 0$, $r_0 = 2$, $\theta = 90°$, $\operatorname{tg}\theta = \infty$, т.е. $\frac{r_0}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0} = \infty$, или $\frac{2}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0} = \infty$, что возможно только тогда, если $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = 0$, но тогда и $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = 0$, т.к. $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0$. Итак, в начальный мом. $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = 0$, слѣдов. 1^я форм. Бинэ примет вид: $v_0^2 = c^2u_0^2$; т.к. $v_0 = 2$, $u_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{2}$, то получим: $4 = c^2\cdot\frac{1}{4}$, или $c^2 = 16$. Подставим в ур. (I): $48u^2 = 16\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$, или $3u^2 = u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}$ или $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 3u^2 - u$ (II). Чтобы интегрировать полученное диффер.-ое ур., обозначим $\frac{du}{d\varphi} = p$; тогда: $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{dp}{d\varphi} = \frac{dp}{du}\cdot\frac{du}{d\varphi} = \frac{dp}{du}\,p = p\cdot\frac{dp}{du}$ и наше дифф. ур. (II) будет: $p\cdot\frac{dp}{du} = 3u^2 - u$. Раздѣляем перемѣнныя: $p\,dp = (3u^2 - u)\,du$. Производим интегрированіе: $\int p\,dp = \int(3u^2 - u)\,du$ или: $\frac{p^2}{2} = u^3 - \frac{u^2}{2} + C_1$, гдѣ C_1 есть произв. постоянное. В начальный момент, при $u = u_0 = \frac{1}{2}$, $p = \frac{du}{d\varphi} = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = 0$ и мы будем имѣть: $0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_1$, т.е. $C_1 = 0$, слѣд. $\frac{p^2}{2} = u^3 - \frac{u^2}{2}$ или $p^2 = 2u^3 - u^2$; $p = \sqrt{2u^3 - u^2} = u\sqrt{2u-1}$; но $p = \frac{du}{d\varphi}$, слѣд. $\frac{du}{d\varphi} = u\sqrt{2u-1}$. Раздѣляем перемѣнныя: $\frac{du}{u\sqrt{2u-1}} = d\varphi$. Интегрируем: $\int\frac{du}{u\sqrt{2u-1}} = \int d\varphi$ или $\int\frac{du}{u\sqrt{2u-1}} = \varphi + C_2$ (C_2 — произв. постоянное). Интеграл лѣвой част преобразовываем так: $\sqrt{2u-1}=z$; $2u-1=z^2$; $u=\frac{1+z^2}{2}$; $du=z\,dz$, слѣд. $\int\frac{du}{u\sqrt{2u-1}}=$ $=\int\frac{z\,dz}{\left(\frac{1+z^2}{2}\right)z}=\int\frac{2\,dz}{1+z^2}=2\,\mathrm{arctg}\,z$ и мы имѣем: $2\,\mathrm{arctg}\,z=\varphi+C_2$ или $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2u-1}=$ $=\varphi+C_2$. В начальный мом., при $\varphi=0$, $u=u_0=\frac{1}{2}$; $\sqrt{2u_0-1}=0$; $\mathrm{arctg}\sqrt{2u_0-1}=0$, т.е. $C_2=0$. Таким образ. получаем: $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2u-1}=\frac{\varphi}{2}$; $\sqrt{2u-1}=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$; $2u-1=$ $=\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$; $2u=1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\mathrm{Sc}^2\frac{\varphi}{2}$; $u=\frac{1}{2}\mathrm{Sc}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cs}^2\frac{\varphi}{2}}$; но $u=\frac{1}{r}$, а потому $\frac{1}{r}=\frac{1}{2\,\mathrm{Cs}^2\frac{\varphi}{2}}$; откуда: $r=2\,\mathrm{Cs}^2\frac{\varphi}{2}=1+\mathrm{Cs}\,\varphi$. Итак, ур. траэкторіи будет: $r=1+\mathrm{Cs}\,\varphi$.

№ 5. Тяжелое колечко ниспадает по пруту, согнутому параболой, пло= скость которой вертикальна. Найти давленіе колечка на прут, в ниж= ней точкѣ. Ур. параболы: $x^2=2y$. Начальное положеніе колечка: $x_0=2$, $y_0=2$.

нач скор $=0$

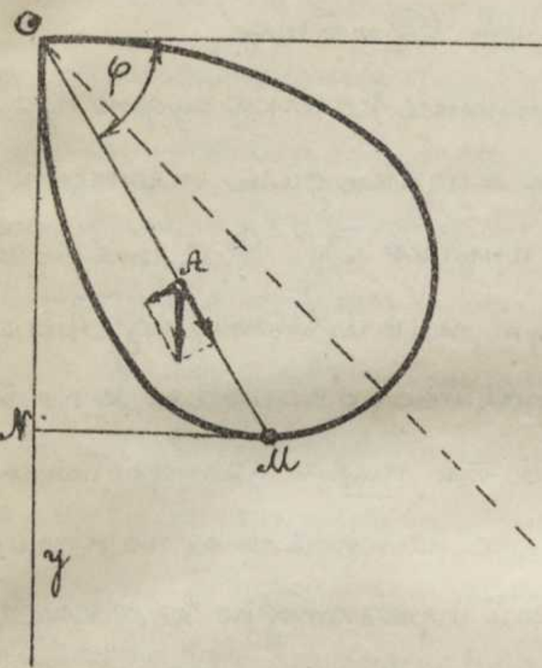
Отв. $Q=5mg$.



Рѣш. Движеніе колечка будет проис= ходить под вліяніем силы тяжести mg и реакціи прута N. Давленіе колеч= ка на прут, как извѣстно из Аналит. мех., направлено по нормали к пруту и = проекціи на эту нормаль силы тяжести mg и центробѣжной силы инерціи; эта послѣдняя сила также направлена по норма= ли к пруту, который представляет собой траэкторію колечка. В нижней точкѣ O нормаль к пруту, имѣющему вид параболы, направ= лена по вертикальной оси yy_1, т.е. по направленію силы тяжести. Цен= тробѣжная же сила $\left(\frac{mv^2}{\rho}\right)$ также направлена по этой оси по нап= равленію вниз (от O к y_1); слѣд., сила давленія Q выразится так: $Q=mg+\frac{mv^2}{\rho}$, гдѣ v — скорость колечка в точкѣ O, а ρ есть радіус кри= визны параболы. Опредѣлим эти величины. Скорость v опредѣлится из интеграла живых сил: работа силы тяжести mg = пріобрѣтен= ной живой силѣ колечка. Работа $=mg\cdot OA=mg\cdot y_0=2mg$; живая си= ла, пріобрѣтен. колечком, есть $\frac{mv^2}{2}$ (т.к. начальная скорость его $=0$). Слѣд.: $2mg=\frac{mv^2}{2}$; откуда $v^2=4g$. Опредѣлим ρ. Из Анализа извѣстно, что $\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$. Ур. параболы есть $x^2=2y$, слѣд., $y=\frac{x^2}{2}$; $\frac{dy}{dx}=x$; $\frac{d^2y}{dx^2}=1$, а потому $\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{1}$. В точкѣ O, $x=0$, слѣд., $\rho=\frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{1}=1$. Подставив найден значенія v^2 и ρ в форм. $Q = mg + \frac{mv^2}{\rho}$, получим $Q = mg + 4mg = 5mg$.

Упражненіе III

№1. По лемнискатѣ, ур. которой: $r^2 = 2a^2 \operatorname{Sn} 2\varphi$, скользитъ внизъ, начиная отъ точки O, вѣсомая точка, не имѣющая начальной скорости. Вычислить продолжительность паденія отъ O до M, какъ функцію угла φ (Сравнить со временемъ паденія по прямой OM). Отв. $t = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt[4]{\operatorname{Ctg}\varphi}$.

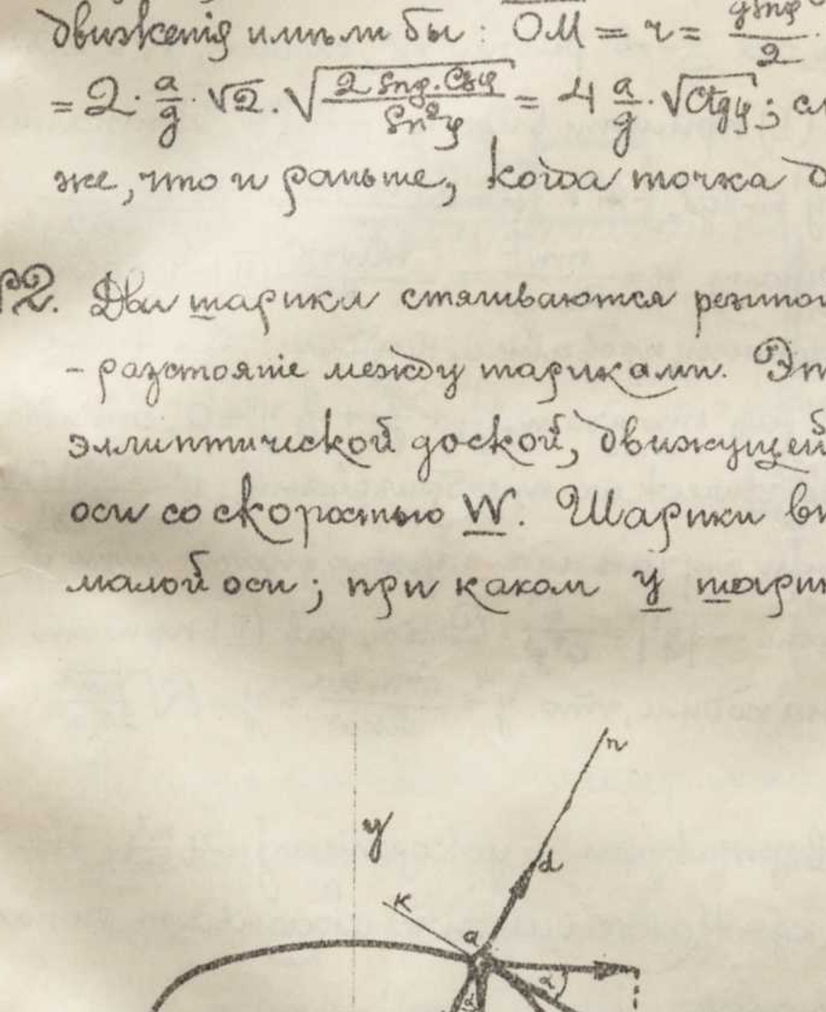


Рѣш. Движеніе точки не свободно и совершается подъ дѣйствіемъ силы тяжести. Воспользуемся интеграломъ живыхъ силъ, одинаковымъ, какъ для свободнаго, такъ и для несвободнаго движенія (при отсутствіи тренія): живая сила = работѣ. Въ началѣ скорость точки была нуль. Въ точкѣ M она $= v$; слѣд., живая сила будетъ $\frac{mv^2}{2}$. Работа силы тяжести будетъ $mg.ON$, а потому имѣемъ: $\frac{mv^2}{2} = mg.ON$, или $v^2 = 2g.ON$; но $ON = OM.\operatorname{Cs}(90^\circ - \varphi) = OM.\operatorname{Sn}\varphi = r\operatorname{Sn}\varphi$; слѣдов., получаемъ: $v^2 = 2gr\operatorname{Sn}\varphi$ (I). Но $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Изъ ур. лемнискаты находимъ: $r = a\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Sn}2\varphi}$. Дифференцируя найдемъ, что $\frac{dr}{d\varphi} = a\sqrt{2}\cdot\frac{\operatorname{Cs}2\varphi}{\sqrt{\operatorname{Sn}2\varphi}}$, а потому: $v^2 = \left(2a^2\cdot\frac{\operatorname{Cs}^2 2\varphi}{\operatorname{Sn}2\varphi} + 2a^2\operatorname{Sn}2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2a^2}{\operatorname{Sn}2\varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. На основаніи равенства (I) получимъ: $\frac{2a^2}{\operatorname{Sn}2\varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gr\operatorname{Sn}\varphi$, или $\frac{a^2}{\operatorname{Sn}2\varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = ga\sqrt{2}.\sqrt{\operatorname{Sn}2\varphi}.\operatorname{Sn}\varphi$, что послѣ упрощенія дастъ: $\frac{a}{4g}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \sqrt{\operatorname{Sn}^5\varphi.\operatorname{Cs}^3\varphi}$, откуда: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt[4]{\operatorname{Sn}^5\varphi.\operatorname{Cs}^3\varphi}$, (беремъ знакъ минусъ, потому что съ увеличеніемъ t, φ уменьшается). Послѣднее выраженіе представимъ такъ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{-\sqrt[4]{\operatorname{Sn}^5\varphi.\operatorname{Cs}^3\varphi}} = dt$, или: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{d\varphi}{-\sqrt[4]{\operatorname{Sn}^5\varphi.\operatorname{Cs}^3\varphi}} = \int dt$ (II);

но $\int\frac{d\varphi}{-\sqrt[4]{Sin^5\varphi\cdot Cos^3\varphi}}=\int\frac{d\varphi}{-Sin^2\varphi\sqrt[4]{\frac{Cos^3\varphi}{Sin^3\varphi}}}=\int-\frac{1}{Sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt[4]{Ctg^3\varphi}}=\int\frac{d(Ctg\varphi)}{Ctg^{3/4}\varphi}=\int(Ctg\varphi)^{-\frac{3}{4}}\cdot dCtg\varphi=$ $=4(Ctg\varphi)^{\frac{1}{4}}=4\sqrt[4]{Ctg\varphi}$; $\int dt=t$. Такъ образомъ рав. (II) приметъ видъ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot4\sqrt[4]{Ctg\varphi}=t+C$, или $2\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\sqrt[4]{Ctg\varphi}=t+C$. Въ началѣ, при $t=0$, $\varphi=90^\circ$, $Ctg90^\circ=0$, слѣд., $0=0+C$, т.е. $C=0$ и мы получимъ $t=2\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\sqrt[4]{Ctg\varphi}$. Если бъ точка двигалась по хордѣ <u>OM</u> (см. на черт. точку <u>A</u>), то, разложивъ силу тяжести на <u>OM</u> и нормально къ ней, мы нашли бы, что движущая сила, $\parallel^{a}$ OM, постоянна и $=mg\,Sin\varphi$, а ускореніе будетъ <u>$g\,Sin\varphi$</u>; по формулѣ равномѣрно ускореннаго движенія имѣли бы: $OM=r=\frac{g\,Sin\varphi}{2}\cdot t^2$, или $t^2=\frac{2r}{g\,Sin\varphi}=\frac{2a\sqrt{2}\cdot\sqrt{Sin2\varphi}}{g\,Sin\varphi}=$ $=2\cdot\frac{a}{g}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2\,Sin\varphi\cdot Cos\varphi}{Sin^2\varphi}}=4\frac{a}{g}\cdot\sqrt{Ctg\varphi}$; слѣдов., $t=2\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\sqrt[4]{Ctg\varphi}$, т.е. то же, что и раньше, когда точка двигалась по дугѣ лемнискаты.

№2. Два шарика стягиваются резиной съ силой, равной <u>$2ky$</u>, гдѣ <u>$2y$</u> — разстояніе между шариками. Эти шарики раздвигаются эллиптической доской, движущейся по направленію большой оси со скоростью <u>W</u>. Шарики вначалѣ лежатъ на концахъ малой оси; при какомъ <u>y</u> шарики покинутъ доску.

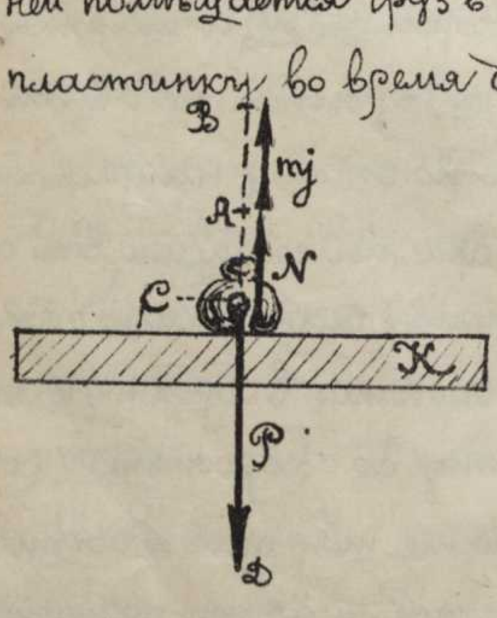
<u>Отв.</u> $y=b\sqrt[4]{\frac{mW^2}{2ka^2}}$.



<u>Рѣш.</u> По условію задачи эллиптическая доска движется по направленію <u>XX'</u> со скоростью <u>W</u>, а шарики <u>a</u> и <u>a</u>, с резиной не двигаются по этому направленію. Если мы сообщимъ всей системѣ (шарикамъ и доскѣ) движеніе въ обратную сторону со скоростью <u>W</u> (отъ X' къ <u>X</u>), то отъ этого относительное движеніе шариковъ и доски не измѣнится. Но тогда доска остановится, шарики получатъ движеніе по направленію отъ <u>X'</u> къ <u>x</u> со скоростью <u>W</u>. Такимъ обра=

зом мы можем изслѣдовать движенiе шариков по эллипсу. Возьмем шарик $\underline{a}$. На него дѣйствует сила притяженiя резины $\underline{al} = 2ky$. Как извѣстно из Анал. Мех. давленiе шарика на эллипс направлено по нормали $\underline{nn}$ и = суммѣ центробѣжной силы инерцiи $\left(\frac{mv^2}{\rho}\right)$ и проекцiи на нормаль дѣйствующей силы $(2ky)$, т. е. $N = ad - af$, гдѣ $ad = \frac{mv^2}{\rho}$, $af = ae.\cos\alpha = 2ky.\cos\alpha$; значит $N = \frac{mv^2}{\rho} - 2ky\cos\alpha$. Когда шарик оставит эллипс, тогда давленiе на доску равно нулю, т. е. $N = \frac{mv^2}{\rho} - 2ky\cos\alpha = 0$, откуда $y = \frac{mv^2}{\rho . 2k\cos\alpha}$ (I). Скорость шарика $\underline{a}$ направлена по касательной $\underline{kk}$ и равна $ab = v$. Составляющая этой скорости по оси $\underline{X}$-ов равна $\underline{w}$, слѣдов., $w = v.\cos\alpha$ или $v = \frac{w}{\cos\alpha}$; слѣдов., рав. (I) примет вид: $y = \frac{mw^2}{2k\rho\cos^3\alpha}$. Припоминая, что $\rho = \pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, гдѣ $y' = -\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\rho = \frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}{y''} = \frac{\sec^3\alpha}{y''} = \frac{1}{\cos^3\alpha . y''}$ и, слѣдоват., $\rho\cos^3\alpha = \frac{1}{y''}$, а потому $y = \frac{mw^2}{2k.\frac{1}{y''}} = \frac{mw^2y''}{2k}$ (II). Берем ур. эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Дифференцированiем найдем: $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}.y' = 0$; $y' = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$. Дифференцируя 2-й раз, получим: $\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{y}{b^2}y'' = 0$; отсюда найдем послѣ простых алгебраических преобразований: $y'' = -\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$. В данном случаѣ нам нужно знать лишь абсолютное значенiе y'', то есть: $|y''| = \frac{b^4}{a^2y^3}$. Слѣд., рав. (II) примет вид: $y = \frac{mw^2.b^4}{2ka^2y^3}$, откуда находим, что $y^4 = \frac{b^4mw^2}{2ka^2}$ и $y = b\sqrt[4]{\frac{mw^2}{2ka^2}}$.

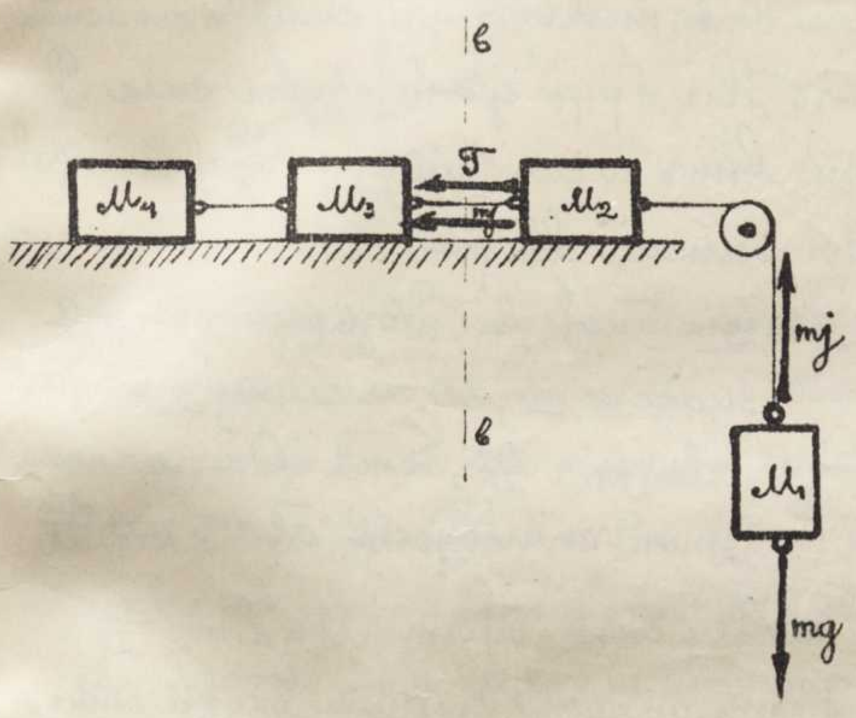
№ 3 Пластинка падает по вертикали с ускоренiем $j = 4\,\frac{mt}{sec^2}$. На ней помѣщается груз в 10 kg. Какое давленiе оказывает он на пластинку во время движенiя.



Рѣш. По принципу д'Аламбера, остановив тѣло и приложив дѣйствующiя силы и силы инерцiи, получим равновѣсiе. В данном случаѣ на тѣло дѣйствуют слѣдующiя силы: $CD = P = 10$ kg — вниз; $CA = N$ — давленiе пластинки $\underline{K}$ на тѣло $\underline{M}$, направленное вверх и сила инерцiи $AB = mj = \frac{P}{g}.j =$

$= \frac{10}{9,8} \cdot 4$. Слѣдов., по принципу д'Аламбера имѣем: $P - N - \frac{P}{g} j = 0$ или $10 - N - \frac{10}{9,8} 4 = 0$, откуда $N = \frac{290}{49}$ кг.

№4. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежат связанные нитью 3 равных груза массы $\underline{m}$. Четвертый такой же груз прикреплен к ним нитью и подвѣшен вертикально. Вся система предоставлена самой себѣ. Опредѣлить натяженіе нити в сѣченіи $\underline{вв}$ во время движенія.

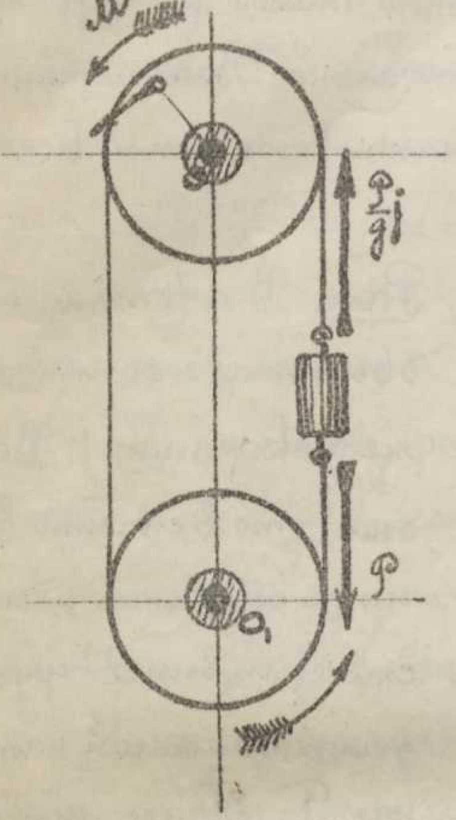


$\underline{Рѣш}$. Всѣ 4 тѣла будут двигаться с одним и тѣм же ускореніем j. Вообразим, что в сѣченіи $\underline{вв}$ нить оборвана и дѣйствіе лѣвых $2^{х}$ грузов замѣнено силой натяженія $\underline{T}$. Приложим к грузам $\underline{M_1}$ и $\underline{M_2}$ силы $\underline{mg}$, $\underline{T}$ и силы инерціи $\underline{mj}$, тогда получим равновѣсіе.

Пользуясь методом Лагранжа, дадим системѣ грузов $\underline{M_1}$ и $\underline{M_2}$ безконечно-малое перемѣщеніе $\underline{\delta s}$ - вниз; тогда сумма элементарных работ будет: $mg.\delta s - mj.\delta s - mj.\delta s - T.\delta s = 0$; или $\delta s(mg - 2mj - T) = 0$; $\delta s \neq 0$, слѣдов., : $mg - 2mj - T = 0$, откуда слѣдует : $T = mg - 2mj$ (I). Опредѣлим j. Всѣ 4 груза, масса которых $= 4m$, приводятся в движеніи силой $\underline{mg}$ $1^{го}$ груза, слѣдов., $mg = 4m.j$; и $j = \frac{g}{4}$. Подставив в ур. (I), получим : $T = mg - 2m.\frac{g}{4} = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}$.

№5. На 2 блока накинут безконечный ремень, несущій груз $\underline{P}$. Найти с каким ускореніем будет двигаться груз под дѣйствіем силы тяжести, если положить вѣс каждаго блока Q, а оси блоков считать на одной вертикали.

Отв. $j = \frac{P}{P+Q} g$

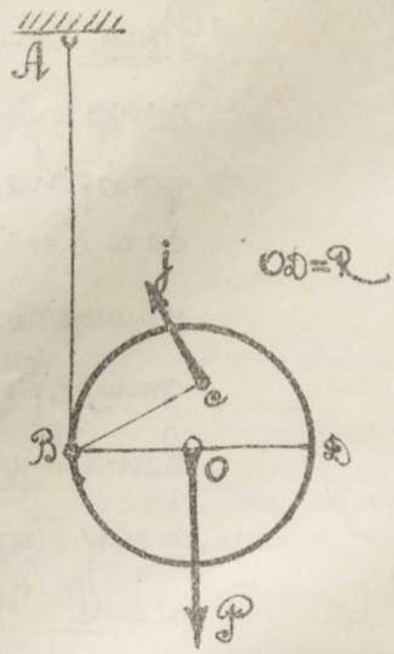


Рѣш. Грузъ движется внизъ с ускореніем j; блоки движутся по стрѣлкѣ часов с угловым ускореніем $\frac{d\omega}{dt}$ при чем, как извѣстно, $j = R\cdot\frac{d\omega}{dt}$, гдѣ R есть радіус блока. Остановим систему и приложим соотвѣтствующіе силы и моменты. На груз дѣйствует сила P вниз и сила инерціи $\frac{P}{g}\cdot j$, направленная вверх. Найдем силы инерціи блоков. Возьмем точку a массы m; ея сила инерціи будет $ab = m\cdot r\frac{d\omega}{dt}$, гдѣ $r = Oa$; момент этой силы будет $\overline{ab}\cdot r = mr^2\frac{d\omega}{dt}$.

Момент, дѣйствующій на весь блок, будет: $M = \Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\Sigma mr^2 = J\frac{d\omega}{dt}$, гдѣ J есть момент инерціи блока относительно оси. Послѣ прибавленія соотвѣтствующих сил мы получим равновѣсіе. Пользуясь методом Лагранжа, даем блоку безк.-малое угловое перемѣщеніе $\delta\varphi$, тогда груз перемѣстится δx, причем, $\delta x = R\cdot\delta\varphi$. Послѣ этого, по теоремѣ Лагранжа, имѣем, что сумма элементарных работ равна нулю; работа момента равна $M\cdot\delta\varphi = J\frac{d\omega}{dt}\cdot\delta\varphi$; так. образом получаем: $P\cdot\delta x - \frac{P}{g}\cdot j\cdot\delta x - 2J\frac{d\omega}{dt}\cdot\delta\varphi = 0$; подставив: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{j}{R}$, $\delta x = R\delta\varphi$ и $J = \frac{QR^2}{2g}$, получим: $(PR - \frac{P}{g}Rj - \frac{QR}{g}j)\delta\varphi = 0$; слѣдов., $PR - \frac{P}{g}Rj - \frac{Q}{g}Rj = 0$ и $j = \frac{P}{P+Q}g$

№6. На диск, вѣс котораго P, намотана нить, конец ея укрѣплен в точкѣ Q. Нить вытянута отвѣсно, диск поставлен вертикально и предоставлен самому себѣ. Найти, какой угловой скоростью он будет обладать через t sec. Отв. $\omega = \frac{2g}{3R}t$.

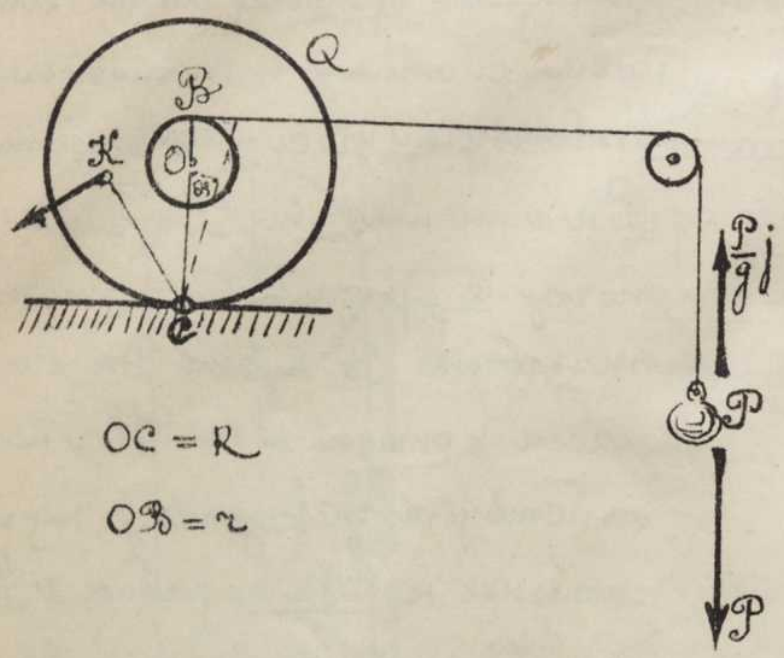
Рѣш. Пусть B будет точка касанія нити AB и диска. Эта точка служит мгновенным центром вращенія диска. Остановим систему и приложим дѣйствующую силу тяжести P и силы инерціи. Возьмем точку c, разстояніе которой от точки B будет Bc = r и масса которой = m. На нее дѣйствует ускореніе j, нормальное к Bc и равное $r\frac{d\omega}{dt}$, гдѣ $\frac{d\omega}{dt}$ есть угловое ускореніе.



Сила инерціи будет таким образом $mr\frac{d\omega}{dt} = mj$; момент этой силы, относительно точки B, будет $mr\frac{d\omega}{dt}\cdot r = mr^2\frac{d\omega}{dt}$. Сумма моментов всѣх сил инерціи, дѣйствующих на точки диска, есть $\Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = \frac{d\omega}{dt}J$, гдѣ J есть момент инерціи диска относительно точки B. Но, как извѣстно, $J = J_0 + MR^2$, гдѣ J_0 есть мом. инерціи относительно точки O, M – масса диска $= \frac{P}{g}$. Подставив $J_0 = \frac{MR^2}{2}$, получим $J = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{P}{g}R^2$. Таким образом $\Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2\cdot\frac{d\omega}{dt}$. Эта сумма моментов должна быть равна моменту силы P относительно B, т.е. PR; слѣд., имѣем: $\frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2\frac{d\omega}{dt} = PR$, откуда $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2g}{3R}$; $\omega = \int\frac{2g}{3R}dt = \frac{2g}{3R}t + C_1$. В началѣ, при $t=0$, $\omega=0$, слѣд., $C_1 = 0$, а потому $\omega = \frac{2g}{3R}t$.

Упражненіе IV.

№1. Опредѣлить ускореніе паденія груза P, который тянет шнур, перекинутый через блок и колесо вмѣстѣ. Колесо может катится по горизонтальной плоскости. Радіус колеса R, радіус блока r. Отв. $j = \frac{P(R+r)^2}{\frac{P}{g}(R+r^2)+\frac{Q}{g}R^2+J_0}$



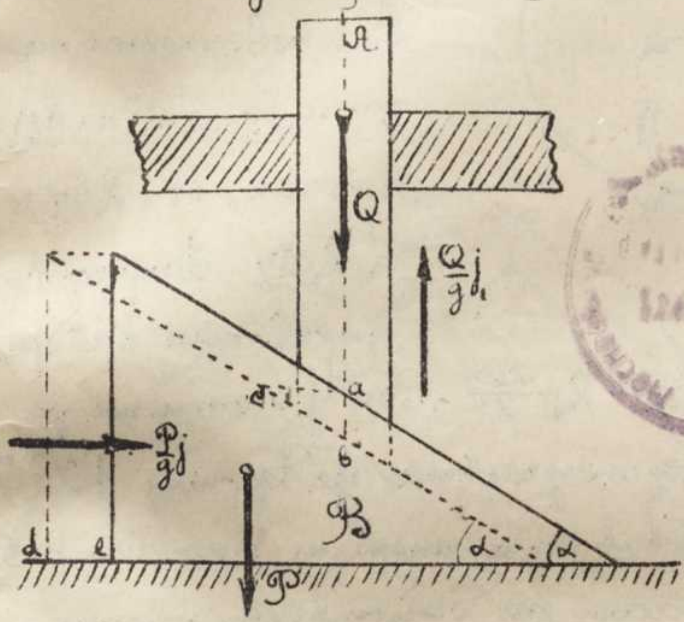
OC = R

OB = r

Рѣш. Груз P и шнур будут имѣть ускореніе j. Колесо с блоком катится по плоскости, причем, мгновенный центр вращенія будет точка C. Угловое ускореніе этого вращенія будет $\frac{d\omega}{dt}=\frac{j}{BC}=\frac{j}{R+r}$ (так как j есть линейное ускореніе точки B). Прибавив к дѣйствующим силам силы инерціи (по принципу д'Аламбера), получим, что на груз P дѣйствует сила тяжести P вниз; сила инерціи $\frac{P}{g}\cdot j$ – вверх; на какую-ниб. точку K колеса (масса которой m и которая удалена от точки C на разстояніе $KC=\rho$) дѣйствует сила инерціи $m\rho\frac{d\omega}{dt}$. Если груз и шнур переместятся на безк.-малое разстояніе δs, то колесо повернется около точки C на безк.-малый угол $\delta\varphi$; причем, $\delta s = BC.\delta\varphi$ и т $\delta s=(R+r)\delta\varphi$. Работа силы P будет $P.\delta s = P(R+r)\delta\varphi$; работа силы инерціи $\left(\frac{P}{g}j\right)$ будет: $-\frac{P}{g}j.\delta s = -\frac{P}{g}j(R+r)\delta\varphi$. На точку K колеса дѣйствует сила инерціи $m\rho\frac{d\omega}{dt}$, момент ея относительно C будет $m\rho^2\frac{d\omega}{dt}$; слѣд., на все колесо будет дѣйствовать момент сил инерціи $M=\Sigma m\rho^2\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\Sigma m\rho^2=\frac{d\omega}{dt}J$, гдѣ J – момент инерціи колеса относительно точки C. Работа сил инерціи будет: $-M\delta\varphi=-J\frac{d\omega}{dt}\cdot\delta\varphi=-J\frac{j}{R+r}\delta\varphi$. Сумма элементарных работ должна $=0$ (по принципу Лагранжа), т.е. $P(R+r)\delta\varphi-\frac{P}{g}j(R+r)\delta\varphi-J\frac{j}{R+r}\delta\varphi=0$ или $\left[P(R+r)-\frac{P}{g}(R+r)j-J\frac{j}{R+r}\right]\delta\varphi=0$;

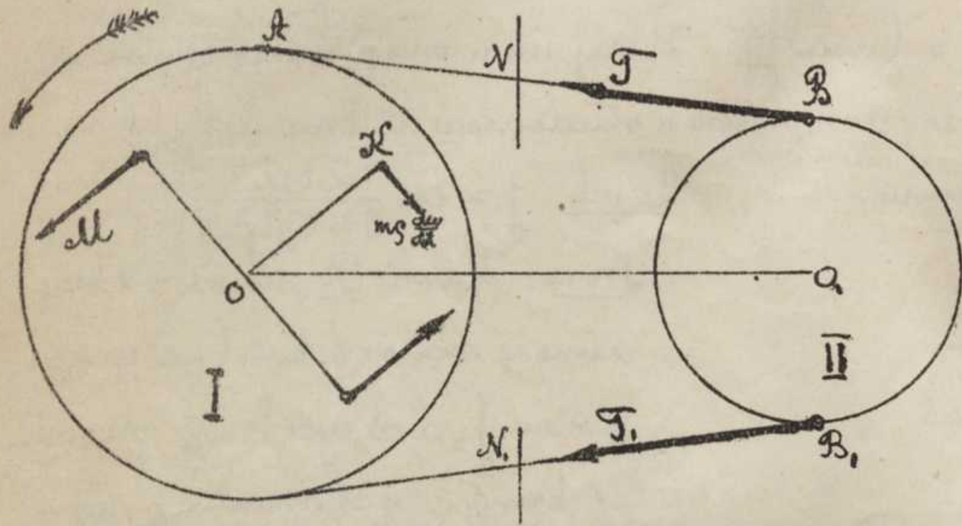
слѣдовательно, $P(R+r) - \frac{P}{g}(R+r)\cdot j - J\cdot\frac{j}{R+r} = 0$; откуда найдемъ, что $j = \frac{P(R+r)^2}{\frac{P}{g}(R+r)^2 + J}$. Какъ извѣстно $J = J_0 + \mu\cdot CO^2$, гдѣ J_0 есть моментъ инерцiи колеса (с блокомъ) относительно точки O, а μ есть масса колеса (с блокомъ), т.к. $\frac{Q}{g} = \mu$; слѣд., $J = J_0 + \frac{Q}{g}\cdot R^2$, так. образомъ получимъ $j = \frac{P(R+r)^2}{\frac{P}{g}(R+r)^2 + \frac{Q}{g}R^2 + J_0}$.

12. По гладкой горизонтальной плоскости можетъ скользить клинъ B данныхъ размѣровъ и вѣса P. Над нимъ опирается брусокъ A, могущiй двигаться вертикально и обладающiй вѣсомъ Q. Опредѣлить ускоренiе клина. Отв. $j = g\cdot\frac{Q\cdot tg\alpha}{P+Q\cdot tg^2\alpha}$.



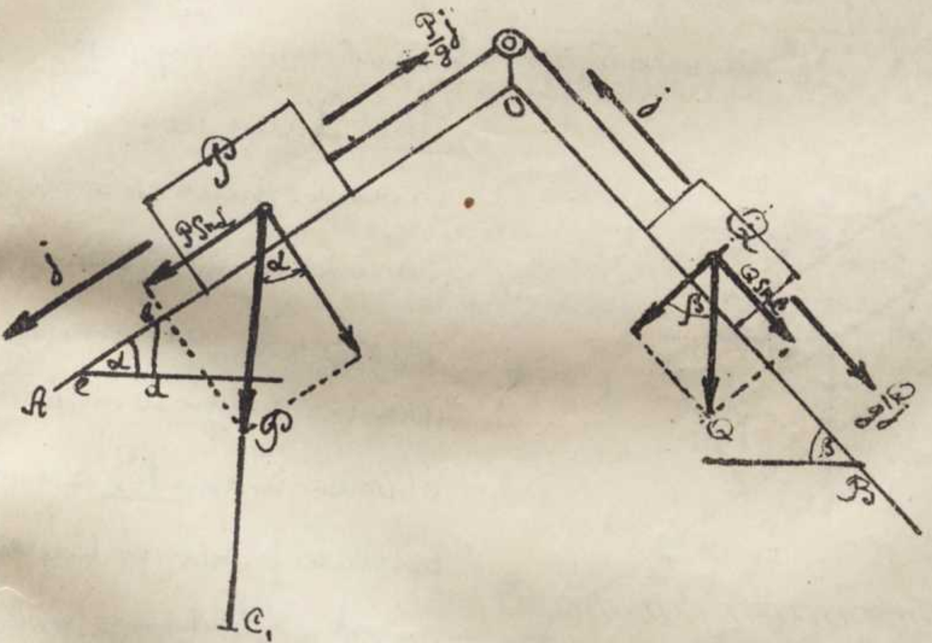
Рѣш. Клинъ B можетъ двигаться только влѣво съ ускоренiемъ j, а брусокъ A движется внизъ съ ускоренiемъ j_1. Если брусокъ A опустится внизъ на величину $ab = \delta z$, то клинъ B передвинется влѣво на величину $ac = \delta x$, при чемъ, какъ видно изъ тр-ка abc: $ab = ac\cdot tg\alpha$, т.е. $\delta z = \delta x\cdot tg\alpha$. Отсюда найдемъ: $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot tg\alpha$; $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot tg\alpha$; но $\frac{d^2z}{dt^2} = j_1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = j$ (как вторая производная отъ пути по времени); слѣд., $j_1 = j\,tg\alpha$. На брусокъ A дѣйствуетъ сила Q внизъ и сила инерцiи $\frac{Q}{g}j_1$ вверхъ; работа этихъ силъ будетъ $(Q - \frac{Q}{g}j_1)\delta z$. На клинъ B по горизонт. направленiю, дѣйствуетъ сила инерцiи $\frac{P}{g}j$; ея работа будетъ: $-\frac{P}{g}j\,\delta x$ (Сила P работы не даетъ, т.к. нормальна къ направленiю движенiя). По принципу Лагранжа имѣемъ: $(Q - \frac{Q}{g}j_1)\delta z - \frac{P}{g}j\,\delta x = 0$, или $Q\cdot\delta z - \frac{Q}{g}j_1\delta z - \frac{P}{g}j\,\delta x = 0$. Подставивъ $\delta z = \delta x\, tg\alpha$, $j_1 = j\,tg\alpha$, получимъ $(Q\,tg\alpha - \frac{Q}{g}tg^2\alpha\cdot j - \frac{P}{g}j)\delta x = 0$, слѣд. $Q\,tg\alpha - \frac{Q}{g}tg^2\alpha\cdot j - \frac{P}{g}j = 0$ и $j = g\cdot\frac{Q\cdot tg\alpha}{P+Q\cdot tg^2\alpha}$.

№3. Два вала въса P и Q и радiусов R и R_1 вращаются около параллельных осей, будучи соединены безконечным ремнем, столь сильно натянутым, что ремень не скользит по валам. На 1ый вал дѣйствует пара сил момента M, приводя его в движенiе. Найти угловое ускоренiе 1го вала и разность натяженiй верхняго и нижняго ремня. Отв. $\frac{d\omega}{dt}=\frac{M}{P+Q}\cdot\frac{2g}{R^2}$; $T-T_1=\frac{MQ}{(P+Q)R}$.



Рѣш. Если точки ремня (а слѣд., и точки A и B) пройдут путь δs, то 1ый вал повернется на угол $\delta\varphi$, а 2ой на $\delta\varphi_1$, причем $\delta s = R\cdot\delta\varphi = R_1\cdot\delta\varphi_1$. Дифференцированiем найдем, что $\frac{d^2s}{dt^2}=R\frac{d^2\varphi}{dt^2}=R_1\cdot\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ или $j=R\frac{d\omega}{dt}=R_1\cdot\frac{d\omega_1}{dt}$, гдѣ j — линейное ускоренiе точек ремня; $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega_1}{dt}$ суть угловыя ускоренiя 1го и 2го валов. Остановив валы и прибавив силы инерцiи, получим равновѣсiе. На точку K 1го вала массы m дѣйствует тангенцiальная сила инерцiи $m\rho\frac{d\omega}{dt}$ ($\rho = OK$), момент ея будет $m\rho^2\frac{d\omega}{dt}$, а момент сил инерцiи на весь 1ый вал будет $\sum m\rho^2\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\sum m\rho^2 = J\frac{d\omega}{dt}$; момент сил инерцiи 2го вала будет $J_1\frac{d\omega_1}{dt}$. Эти моменты дѣйствуют противоположно моменту M. Элементарныя работы при перемѣщенiи ремня на δs (а валов на $\delta\varphi$ и $\delta\varphi_1$) будут: $M\cdot\delta\varphi - J\frac{d\omega}{dt}\cdot\delta\varphi - J_1\frac{d\omega_1}{dt}\cdot\delta\varphi_1$, что по теор. Лагранжа равно нулю. Раньше мы имѣли $R\delta\varphi = R_1\delta\varphi_1$ и $R\frac{d\omega}{dt}=R_1\frac{d\omega_1}{dt}$, слѣд. $\delta\varphi_1=\frac{R}{R_1}\delta\varphi$ и $\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{R}{R_1}\frac{d\omega}{dt}$ и предыдущее ур. примет вид: $\left(M - J\frac{d\omega}{dt} - J_1\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{R^2}{R_1^2}\right)\delta\varphi = 0$, т.е. $M - J\frac{d\omega}{dt} - J_1\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{R^2}{R_1^2}=0$, откуда $\frac{d\omega}{dt}=\frac{M}{J+J_1\frac{R^2}{R_1^2}}$. Подставив $J=\frac{P}{2g}R^2$, $J_1=\frac{Q}{2g}R_1^2$, получим: $\frac{d\omega}{dt}=\frac{M\cdot 2g}{(P+Q)R^2}$. Чтобы опредѣлить разность натяженiй ремня, вообразим, что ремень перерѣзан въ точкахъ N и N_1 и разсматриваемъ равновѣсіе 2-го вала подъ дѣйствіемъ силъ натяженія T и T_1 и силъ инерціи. Сумма моментовъ этихъ силъ $= 0$ (относительно точки O_1). Моментъ $T = T.R_1$, мом. $T_1 = T_1.R_1$, мом. силъ инерціи, какъ мы видимъ, равенъ $J_1\frac{d\omega_1}{dt} = J_1\frac{R}{R_1}.\frac{d\omega}{dt}$; слѣдов., $TR_1 - T_1R_1 - J_1\frac{R}{R_1}\frac{d\omega}{dt} = 0$; откуда $T - T_1 = $ $= J_1\frac{R}{R_1^2}.\frac{d\omega}{dt}$. Подставивъ $J_1 = \frac{Q}{2g}R_1^2$ и $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M.2g}{(P+Q)R^2}$, получимъ $T - T_1 = \frac{MQ}{(P+Q)R}$.

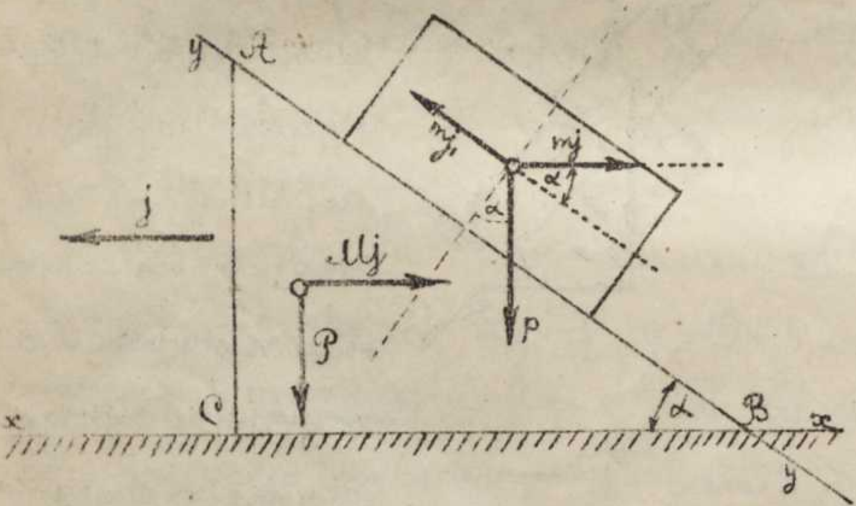
№4. Два груза P и Q соединены нерастяжимой нитью и принуждены скользить безъ тренія по 2-мъ наклоннымъ плоскостямъ. Указать, въ какомъ случаѣ движеніе будетъ совершаться въ сторону груза P, и сколько ему потребуется времени, чтобы опуститься по вертикали на высоту h.



Рѣш. Разложимъ силы P и Q на слагающія вдоль плоскости и перпендикулярно къ плоскости, найдемъ, что нормальныя силы уничтожатся сопротивленіемъ плоскостей, а движущими силами будутъ первыя, а именно: $P.\sin\alpha$ и $Q.\sin\beta$. Дѣйствіе этихъ силъ противоположно, поэтому для того, чтобы система двигалась въ сторону груза P, необходимо (и достаточно), чтобы $P\sin\alpha > Q\sin\beta$. Движущей силой будетъ разность $P.\sin\alpha - Q.\sin\beta$. При соблюденіи указаннаго условія грузы будутъ двигаться съ одинаковымъ ускореніемъ j, проходя одинаковыя разстоянія. Остановимъ систему, и прибавимъ силы инерціи. На грузъ P дѣйствуютъ: сила $P\sin\alpha$ по OA и сила инерціи $\frac{P}{g}j$ по AO. На грузъ Q:

силы $Q\sin\beta$ по $\underline{OB}$ и сила инерции $\frac{Q}{g}j$ также по $\underline{OB}$. Сумма элементарных работ будет: $P\sin\alpha\cdot\delta x - \frac{P}{g}j\cdot\delta x - Q\sin\beta\cdot\delta x - \frac{Q}{g}j\cdot\delta x = 0$ или $P\sin\alpha - Q\sin\beta - \left(\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\right)j = 0$, откуда $j = \frac{P\sin\alpha - Q\sin\beta}{P+Q}g$. $\underline{j}$ будет постоянно во время движения и движение будет равномерно ускоренное. Во время $\underline{t}$ пройденный путь будет $s = j\cdot\frac{t^2}{2}$. Если груз опустится на высоту $\underline{h}$, то, как легко видеть из чертежа (см. $\Delta\, bde$), по направлению наклонной плоскости $\underline{OA}$ он переместится на длину $s = \frac{h}{\sin\alpha}$. Таким образом мы получим: $\frac{h}{\sin\alpha} = j\frac{t^2}{2}$; $t^2 = \frac{2h}{j\sin\alpha}$ и $t = \sqrt{\frac{2h}{j\sin\alpha}}$. Подставив значение $\underline{j}$, получим: $t = \sqrt{\frac{2h(P+Q)}{g\sin\alpha(P\sin\alpha - Q\sin\beta)}}$

№5. Клин данных размеров и веса $\underline{P}$ может скользить по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. С клина соскальзывает груз $\underline{p}$. С каким ускорением $\underline{j}$ клин будет скользить по гориз. плоскости и какое давление $\underline{N}$ на него будет оказывать груз $\underline{p}$.

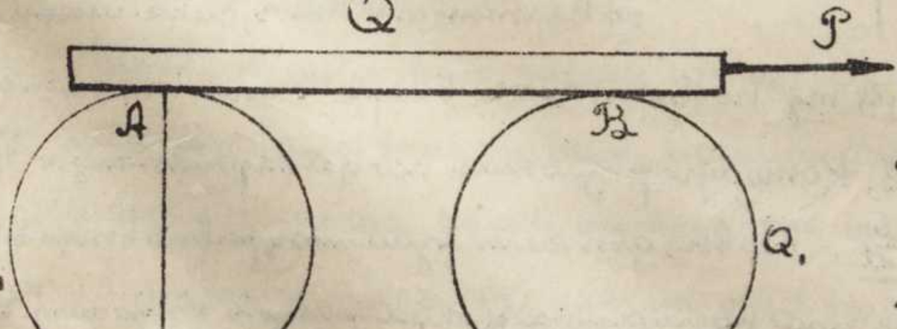


Реш. Клин может двигаться только горизонтально (по направл. $\underline{x}$), груз же $\underline{p}$ может еще иметь относительное движение по $\underline{AB}$ с ускорением j_1, направленным от $\underline{A}$ к $\underline{B}$. Остановим систему и приложим силы инерции. На клин, кроме силы тяжести, нормальной к направлению возможного перемещения, будет действовать сила инерции $\underline{Mj}$, где $M = \frac{P}{g}$ (как указано на чертеже). На груз действует сила $\underline{p}$ вниз, сила инерции от переносного движения mj ($m = \frac{p}{g}$), направленная по оси $\underline{x}$ вправо, сила инерции $\underline{mj_1}$ от относительного движения, направленная от $\underline{B}$ к $\underline{A}$ по $\underline{BA}$. Так как груз может перемещаться по 2-м направлениям (по оси $\underline{x}$ и по оси y), то, вообще говоря, эта система имеет 2 степени свободы. Давая параметру $\underline{x}$ безк.-малое приращеніе $\underline{\delta x}$ влѣво, получим: $\sum X\delta x = 0$, то есть: $-Mj.\delta x - mj.\delta x + mj_1\cos\alpha.\delta x = 0$ ($\underline{\alpha}$ есть уголъ между направленіем $\underline{AB}$ или j_1 с осью $\underline{x}$), или же $Mj+mj=mj_1\cos\alpha$; $(M+m)j = mj_1\cos\alpha$ (I). Перемѣщая груз $\underline{p}$ по оси $\underline{y}$ (от $\underline{A}$ к $\underline{B}$), получим: $\sum Y\delta y = 0$, т. е. $mj\cos\alpha.\delta y + p\sin\alpha.\delta y - mj_1.\delta y = 0$, откуда: $mj\cos\alpha + mg\sin\alpha - mj_1 = 0$ ($p = mg$) или: $mj\cos\alpha + mg\sin\alpha = mj_1$. Подставив значеніе $\underline{mj_1}$ в урав. (I), получим: $(M+m)j = mj\cos^2\alpha + mg\sin\alpha\cos\alpha$. Из этого ур. найдем, что $j = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} = \frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{P}{g}+\frac{p}{g}\sin^2\alpha} = g\frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha}$. Для опредѣленія $\underline{N}$, проектируем всѣ силы, дѣйствующія на груз, на направленіе перпендикулярное к плоскости $\underline{AB}$, тогда мы получим: $N = p\cos\alpha - mj\sin\alpha = p\cos\alpha - mg\frac{p\sin^2\alpha.\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha} = p\cos\alpha - \frac{p^2\sin^2\alpha.\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha} = \frac{Pp\cos\alpha + p^2\sin^2\alpha\cos\alpha - p^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha} = \frac{Pp\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha}$. Итак $N = \frac{Pp\cos\alpha}{P+p\sin^2\alpha}$.

Упражненіе V.

№ 1. Доска лежит на двух катках и приводится в движеніе силой $\underline{P}$, направленной по доскѣ. Вѣс доски $\underline{Q}$ и каждаго катка $\underline{Q_1}$. Опредѣлить ускореніе доски, предполагая, что нѣт скольженія.

Отв. $j = \frac{Pg}{Q+\frac{3}{4}Q_1}$.

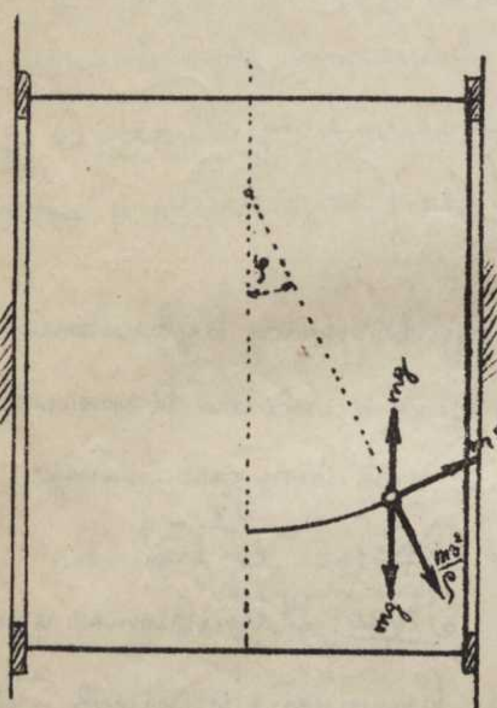


Рѣш. Мгновенные центры вращенія катков будут $\underline{C}$ и $\underline{D}$. Ускореніе доски j; слѣд., линейное ускореніе точек $\underline{A}$ и $\underline{B}$ также j, а угловое ускореніе катков будет $\frac{d\omega}{dt}$, причем $\frac{d\omega}{dt} = \frac{j}{2R}$, гдѣ $\underline{R}$ – рад. катка.

Сила инерціи доски будет $\frac{Q}{g}j$, момент сил инерціи катка относительно $\underline{C}$ будет $J\frac{d\omega}{dt}$, гдѣ $\underline{J}$ момент инерціи относительно $\underline{C}$. Если дадим доскѣ безк.-малое перемѣщеніе $\underline{\delta x}$, то катки повернутся на безк.-малый угол $\underline{\delta\varphi}$, при чем $\delta x = 2R.\delta\varphi$. По принципу

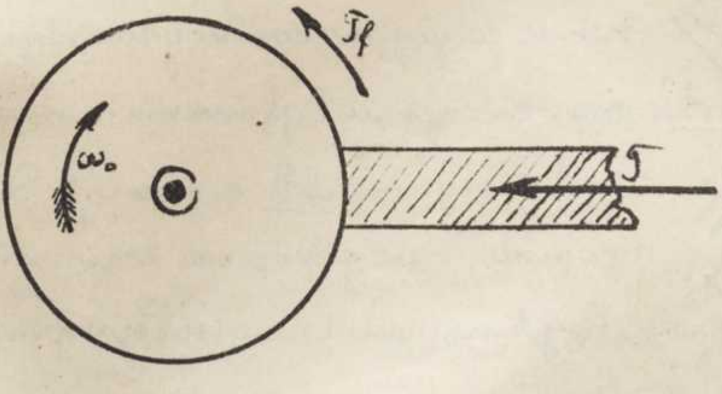
Лагранжа имѣем: $P.\delta x - \frac{Q}{g} j \cdot \delta x - 2J\frac{d\omega}{dt}\cdot\delta\varphi = 0$; но $\frac{d\omega}{dt} = \frac{j}{2R}$, $\delta\varphi = \frac{\delta x}{2R}$, а потому имѣем: $\left[P - \frac{Q}{g}j - 2J\frac{j}{(2R)^2}\right]\delta x = 0$, откуда находим: $P - \frac{Q}{g}j - \frac{J}{2R^2}j = 0$ (I). Но $J = J_0 + \frac{Q_1}{g}R^2 = \frac{Q_1}{2g}R^2 + \frac{Q_1}{g}R^2 = \frac{3}{2g}Q_1R^2$; ур. (I) приметъ вид: $P - \frac{Q}{g}j - \frac{3}{4}\frac{Q_1}{g}j = 0$ или $j = \frac{Pg}{Q+\frac{3}{4}Q_1}$

№2. По неподвижным вертикальным стержням скользит без тренія доска, на которой укрѣплен маятник. В начальном положеніи маятник отклонен от вертик. положенія на угол φ. Доска начинает двигаться без начальной скорости. Найти період качанія маятника. Ускореніе доски g.



Рѣш. Обозначим массу маятника через m, массу доски через M. Маятник, кромѣ движенія с доской, имѣет еще относит. движеніе по отношенію к доскѣ. Остановим всю систему (и маятник и доску). К доскѣ надо будет приложить силу инерціи Mg и силу тяжести также Mg. На маятник же дѣйствуют: сила тяжести mg по вертикали вниз, сила инерціи от переноснаго движенія mg по вертикали вверх, сила инерціи относительнаго движенія, которую разложим на центробѣжную $\frac{mv^2}{\rho}$ и тангенціальную $m\frac{dv}{dt}$. Первыя двѣ силы взаимно уравновѣшиваются. Центробѣжная сила нормальна к траекторіи относит. движенія. Если теперь дадим маятнику безк.-малое перемѣщеніе по дугѣ δs, то работа будет произведена только тангенц. силой инерціи ($m\frac{dv}{dt}$) и по принципу Лагранжа будем имѣть: $m\frac{dv}{dt}\cdot\delta s = 0$, слѣд., $m\frac{dv}{dt}=0$ и $\frac{dv}{dt}=0$; но $\frac{dv}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}$ (l — длина маятника), а потому $l\frac{d\varphi}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$, $\varphi=\text{const}$. Итак, угол φ есть постоянная величина, т.е. маятник не движется относительно доски и період колебанія будетъ безконечность.

№3. Массивный дискъ радіуса R и вѣса Q вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. С какой силой T надо нажать тормазъ, чтобы остановить дискъ, давъ ему сдѣлать только одинъ оборотъ.

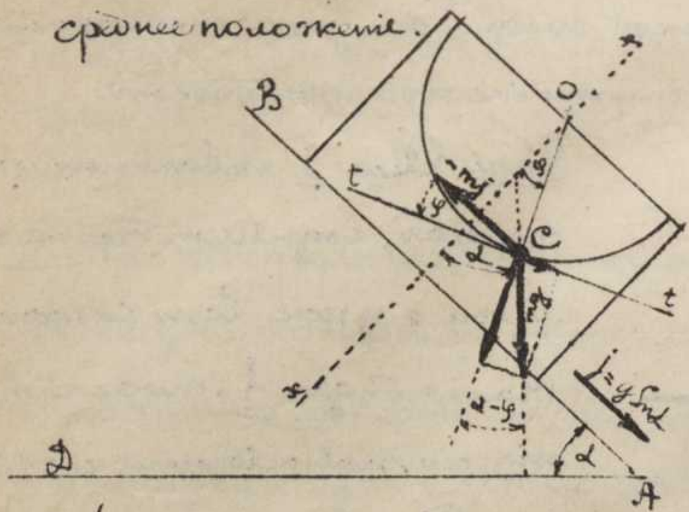


Рѣш. Сила T, дѣйствующая на тормазъ, вызываетъ треніе тормаза о дискъ. Если коэффиц. тренія будетъ f, то сила тренія, останавливающая дискъ, будетъ Tf. Направлена она по окружности диска, противоположно направленію вращенія. Моментъ этой силы относительно центра диска будетъ $M=Tf.R$. Уравн. вращательнаго движенія, как извѣстно из курса, будетъ: $M \mp J\cdot\frac{d\omega}{dt}=0$; $\frac{d\omega}{dt}=\pm\frac{M}{J}$. Так как въ данномъ случаѣ $\frac{d\omega}{dt}<0$, так как движеніе замедляется, то надо взять $\frac{d\omega}{dt}=-\frac{M}{J}$. Далѣе имѣем $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$, гдѣ φ есть уголъ поворота диска; $\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\omega}{d\varphi}\omega$ и мы получим: $\omega\frac{d\omega}{d\varphi}=-\frac{M}{J}$, или $\omega.d\omega=-\frac{M}{J}d\varphi$; интегрируем, взявъ для ω предѣлы от ω_0 до нуля (когда дискъ остановится $\omega=0$), а для φ – от нуля до 2π: $\int_{\omega_0}^{0}\omega d\omega=-\int_0^{2\pi}\frac{M}{J}d\varphi$; $-\frac{\omega_0^2}{2}=-\frac{M}{J}\cdot 2\pi$; $M=J\frac{\omega_0^2}{4\pi}$ (I). Но $M=TfR$, $J=\frac{Q}{2g}R^2$, ур. (I) приметъ вид: $TfR=\frac{Q}{2g}\cdot\frac{R^2\omega_0^2}{4\pi}$; $T=\frac{QR\omega_0^2}{8\pi fg}$.

№4. Рѣшить предыдущую задачу примѣненіем интеграла живыхъ силъ.

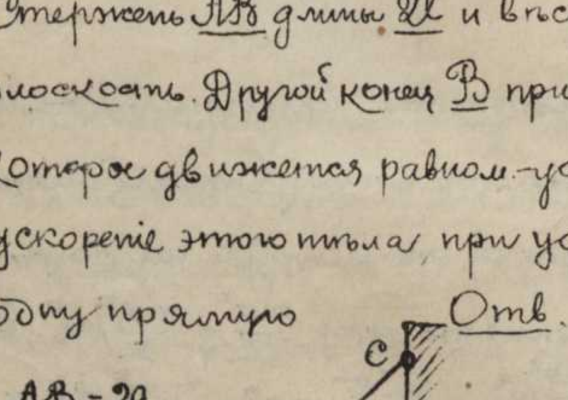
Рѣш. Найдем живую силу вращательнаго движенія диска. Какая-нибудь точка диска, отстоящая от центра на разстояніи ρ и имѣющая массу m, имѣетъ живую силу $\frac{mv^2}{2}=\frac{m\rho^2}{2}\omega_0^2$. Живая сила диска будетъ: $\Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma\frac{m\rho^2}{2}\omega_0^2=\frac{\omega_0^2}{2}\Sigma m\rho^2=J\frac{\omega_0^2}{2}$. Работа силы тренія за одинъ оборотъ = силѣ, умноженной на путь, то есть $Tf.2\pi R$. Эта работа = потерянной живой силѣ диска: $Tf.2\pi R=J\frac{\omega_0^2}{2}$; $T=J\frac{\omega_0^2}{4\pi fR}$, но $J=\frac{Q}{2g}R^2$, слѣд. $T=\frac{QR\omega_0^2}{8\pi fg}$.

№5. Полусферическій сосудъ движется по наклонной абсолютно гладкой плоскости, образующей с горизонтом угол α. Опредѣлить положеніе тяжелаго шарика в этом подвижном сосудѣ. Отв. шарик займет среднее положеніе.



Рѣш. Шарик в сосудѣ находится в покоѣ, слѣд., он не имѣет относит. движенія по отношенію к сосуду, а только участвует вмѣстѣ с сосудом в движеніи по наклонной плоскости AB с ускор. j. Это ускореніе, как ускореніе всякаго тѣла, движущагося по наклонной плоск. под вліяніем (тяжести) (и без тренія), будет: $j = g\,Sin\,\alpha$. Пусть шарик находится в искомом положеніи равновѣсія в точкѣ C, опредѣляемой углом $COx = \varphi$. Установим систему по принц. д'Аламбера. На шарик будут дѣйствовать: силы инерціи $mj = mg\,Sin\,\alpha$ ($\|^{но}$ накл. плоск. AB), сила тяжести mg и реакція сосуда. Дадим теперь шарику безк.-малое перемѣщеніе δs; тогда реакція сосуда работы, т.к. она нормальна к элементу пути; работа силы инерціи будет: $mj\,Cos\,\varphi\,.\,\delta s = mg\,Sin\,\alpha\,Cos\,\varphi\,\delta s$ (см. черт.); работа силы тяжести будет: $-mg\,.\,Sin(\alpha-\varphi)\,\delta s$. По принц. Лагранжа сумма элемент. работ $= 0$, т.е. $mg\,Sin\,\alpha\,Cos\,\varphi\,\delta s - mg\,Sin(\alpha-\varphi)\,\delta s = 0$; $Cos\,\alpha\,Sin\,\varphi = 0$, т.к. $Cos\,\alpha \neq 0$, то $Sin\,\varphi = 0$, $\varphi = 0$, т.е. шарик будет находиться на оси xx в среднем положеніи.

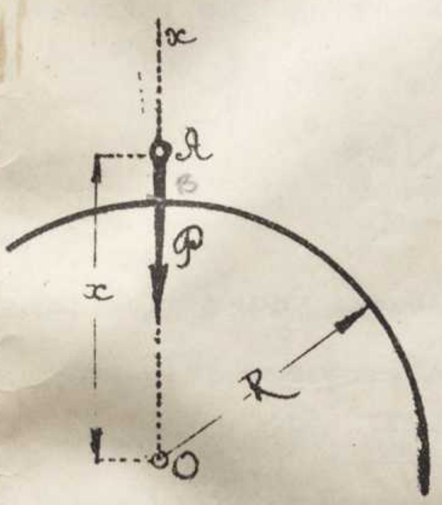
№6. Стержень AB длины $2l$ и вѣса P опирается концом A на горизонт. плоскость. Другой конец B привязан нитью длины a к точкѣ C тѣла, которое движется равном.-ускоренно по горизонт. направленію. Опред. ускореніе этого тѣла, при условіи, чтоб нить и стержень составляли одну прямую. Отв. $j = \frac{g}{h}\sqrt{(2l+a)^2 - h^2}$



Рѣш. Установим систему по принципу д'Аламб. На стержень будут дѣйствовать слѣд. силы: сила тяж. P, сила инерціи $\frac{P}{g}j$, сила натяженія нити S и сила реакціи плоскости N. Под дѣйствіем этих сил стержень должен находиться в равновѣсiи; слѣд., момент всѣх сил относит. точки A должен $= 0$. Силы N и S относит. A не дают моментов; для остальных 2ˣ сил имѣем: $Pl\cos\alpha - \frac{P}{g}jl\sin\alpha = 0$. Отсюда $j = g\,\mathrm{Ctg}\,\alpha$, но $\mathrm{Ctg}\,\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{(2l+a)^2-h^2}}{h}$, слѣд., $j = \frac{g\sqrt{(2l+a)^2-h^2}}{h}$.

Упражненiе VI

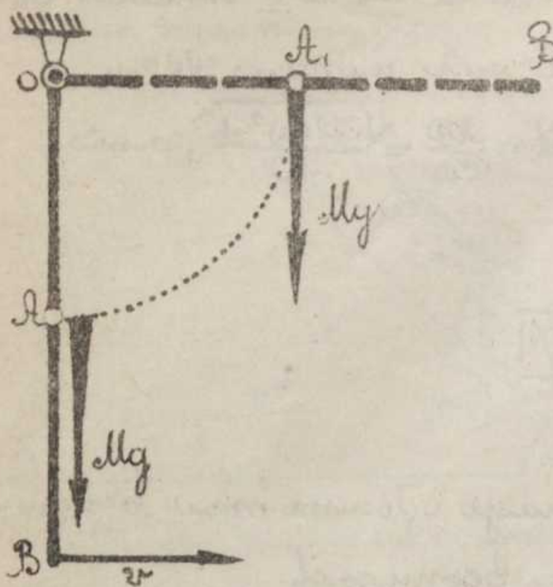
№1. С какой наименьшей скоростью надо бросить тѣло вертикально вверх, чтобы оно на землю не вернулось.



Рѣш. Пусть тѣло брошено вверх с начальной скоростью v_0 и оно находится в точкѣ A на разстоянiи x от центра земли. На тѣло дѣйствует сила тяжести $P = \frac{kmM}{x^2} = \frac{\mu m}{x^2}$, гдѣ $\mu = kM$ (M — масса земли). Берем ур. $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$. В данном случаѣ $X = -P = -\frac{\mu m}{x^2}$ и мы получим: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2}$. Но $\frac{dx}{dt} = v$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx}$. Слѣдов., $v\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^2}$; $v\,dv = -\frac{\mu}{x^2}dx$; $\int v\,dv = \int -\frac{\mu}{x^2}dx$; $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{x} + C_1$. Когда тѣло было на поверхности земли в B_0, то $v = v_0$, $x = R$, т.е. $\frac{v_0^2}{2} = \frac{\mu}{R} + C_1$; $C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{R}$; и $\frac{v^2}{2} = \mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right) + \frac{v_0^2}{2}$ (I). Точка начнет падать на землю обратно, когда $v = 0$. Чтобы точка не вернулась на землю, нужно, чтобы скорость обратилась в нуль при $x = \infty$; таким образом, ур. (I) примет вид: $0 = -\frac{\mu}{R} + \frac{v_0^2}{2}$; $v_0^2 = \frac{2\mu}{R}$; $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$. Но $\mu = R^2 g$ (см. Аналит. мех. стр. 33), слѣд., $v_0 = \sqrt{2Rg} = 11179\ \frac{\text{mtr}}{\text{sec}}$.

№2. Стержень длиною l подвѣшен на шарнирѣ в точкѣ O. Какую горизонтальную скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он поднялся до горизонтального положенія

Отв. $v=\sqrt{3gl}$.

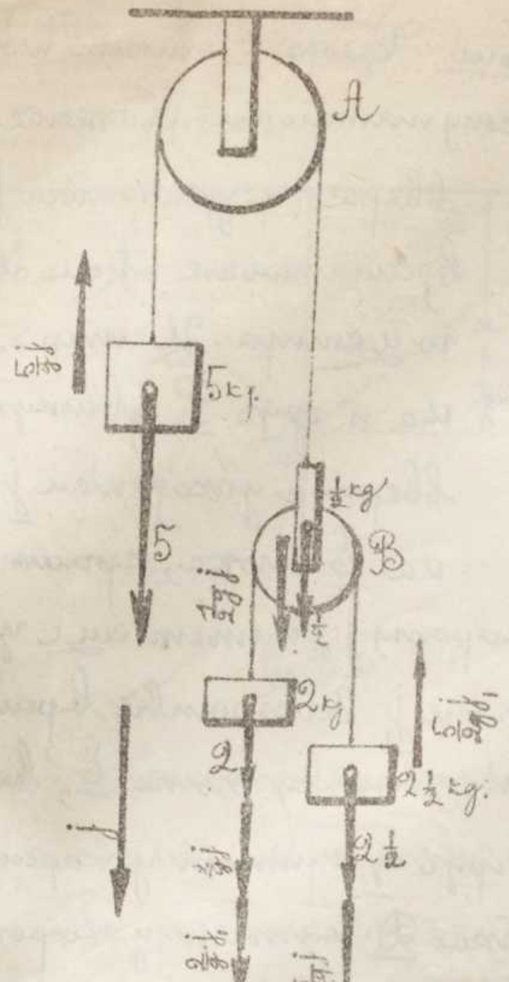


Рѣш. Пользуемся интеграломъ живыхъ силъ: работа силы тяжести при перемѣщеніи изъ положенія $\underline{OB}$ въ $\underline{OB_1}$ будетъ: $-Mg.OA=-Mg\frac{l}{2}$, такъ какъ центръ тяжести поднялся на $\frac{l}{2}$. Живая сила стержня въ началѣ была $J\frac{\omega^2}{2}$, гдѣ $\underline{J}$ — моментъ инерціи стержня относительно точки $\underline{O}$; въ концѣ живая сила — нуль. По теоремѣ живыхъ силъ: $-Mg\frac{l}{2}=-J\frac{\omega^2}{2}$; $Mgl=J\omega^2$. Но $J=\frac{Ml^2}{3}$, $\omega=\frac{v}{l}$; слѣдов., $\frac{Ml^2v^2}{3l^2}=Mgl$; $v^2=3gl$; $v=\sqrt{3gl}$.

№3. Черезъ неподвижный блокъ $\underline{A}$ переброшена нить, на одномъ концѣ которой прикрѣпленъ грузъ въ 5 кг., а на другомъ обойма вѣсомъ въ $\frac{1}{2}$ кг., въ которой вращается блокъ $\underline{B}$. Черезъ этотъ послѣдній переброшена другая нить, на концахъ которой прикрѣплены грузы въ $\underline{2}$ и $2\frac{1}{2}$ кг. Пренебрегая вѣсомъ блоковъ, найти ускоренія грузовъ.

Отв. Если j — ускореніе груза въ 5 кг., а $\underline{j_1}$ — ускор. груза въ $2\frac{1}{2}$ кг., то $j=\frac{1}{179}g$, $j_1=\frac{20}{179}g$.

Рѣш. Вѣсъ обоймы и 2ˣ грузовъ будетъ: $\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}=5$ кг., т. е. равенъ вѣсу лѣваго груза. Но равновѣсія не будетъ, такъ какъ на грузы въ 2 кг. и $2\frac{1}{2}$ кг. будутъ еще дѣйствовать силы инерціи отъ относительнаго движенія (по отношенію къ блоку $\underline{A}$). Допустимъ, что движеніе будетъ совершаться въ сторону лѣваго груза въ 5 кг. с ускореніемъ $\underline{j}$. (Если въ результатѣ получится для $\underline{j}$ отрицательное число, то это покажетъ, что движеніе будетъ въ противоположную сторону). Для меньшихъ грузовъ относительное движеніе совершаться въ сторону праваго

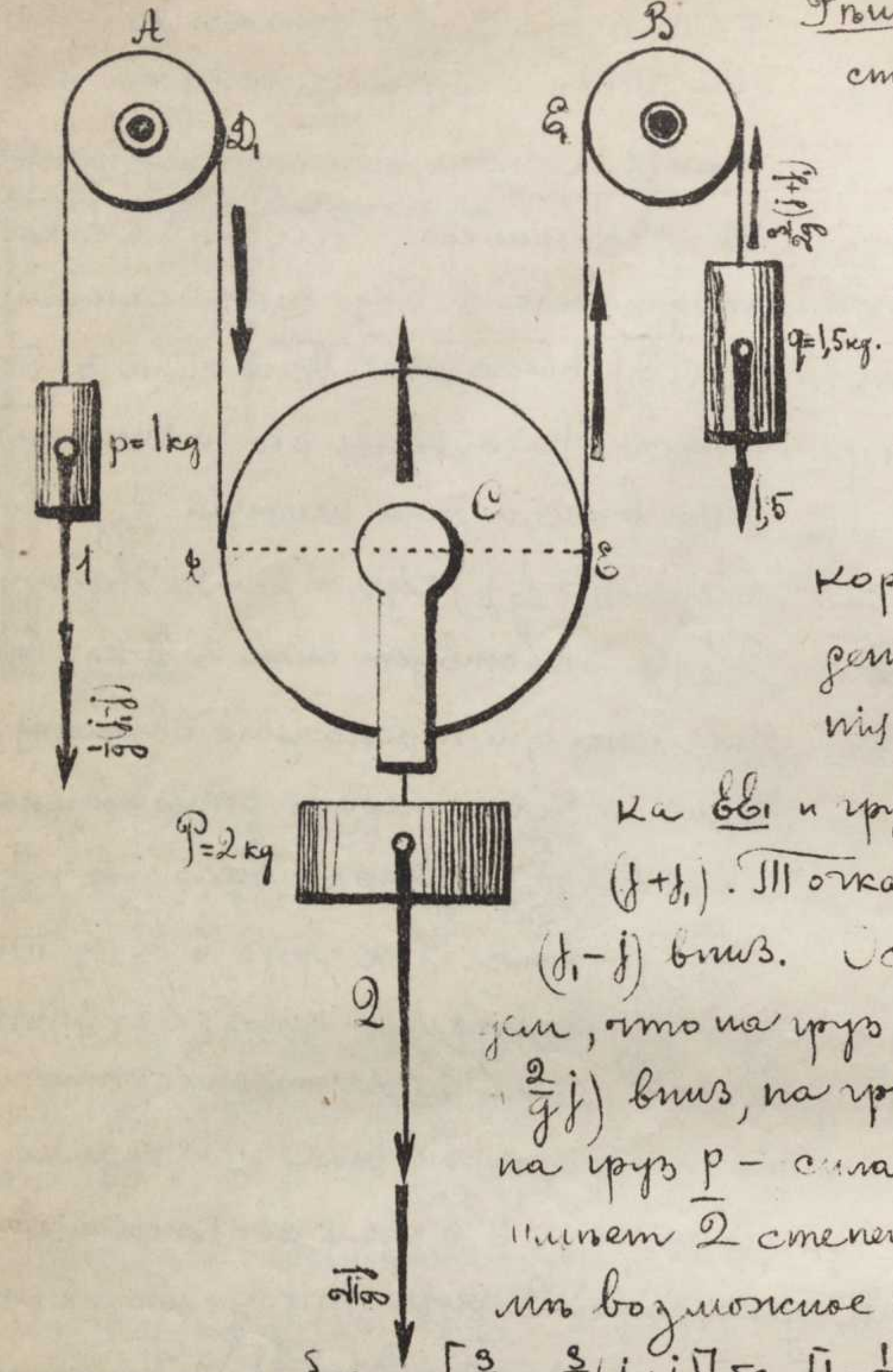


груза в $2\frac{1}{2}$ кг. с ускорением j_1. Слѣдоват., оба меньшие груза участвуют в 2^х движениях. Остановим систему по принципу д'Аламбера. На груз в 5 кг. дѣйствует сила в 5 кг. вниз и сила инерціи $\frac{5}{g}j$ вверх, т.е. всего сила в $\left(5-\frac{5}{g}j\right)$ кг вниз. На обойму дѣйствует сила в $\frac{1}{2}$ кг. вниз и сила инерціи $\frac{1}{2g}j$ – вниз, т.е. всего $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2g}j\right)$ килогр. – вниз. На груз в $2\frac{1}{2}$ кг. дѣйствует сила в $\frac{5}{2}$ кг. вниз, сила инерціи переноснаго движенія $\frac{5}{2g}j$ вниз и сила инерціи относительнаго движенія $\frac{5}{2g}j_1$ – вверх, всего: $\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2g}j-\frac{5}{2g}j_1\right)$ – вниз. На груз в 2 кг. дѣйствуют силы: $\left(2+\frac{2}{g}j+\frac{2}{g}j_1\right)$ килограмм. – вниз. Если теперь, по принципу Лагранжа, дадим перемѣщеніе относительно блока $\underline{A}$, то найдем, что для равновѣсія необходимо, чтобы силы, дѣйствующія на груз в 5 кг. равнялись силам, дѣйствующим на остальные 3 груза, т.е. должно быть:

$$5-\frac{5}{g}j=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2g}j\right)+\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2g}j-\frac{5}{2g}j_1\right)+\left(2+\frac{2}{g}j+\frac{2}{g}j_1\right).$$

По упрощеніи получим: $\frac{10}{g}j-\frac{1}{2g}j_1=0$, откуда $j=\frac{1}{20}j_1$. Если теперь дадим перемѣщеніе только блоку $\underline{B}$, то для равновѣсія необходимо, чтобы: $\frac{5}{2}+\frac{5}{2g}j-\frac{5}{2g}j_1=2+\frac{2}{g}j+\frac{2}{g}j_1$, откуда $\frac{1}{2}+\frac{1}{2g}j=\frac{9}{2g}j_1$; $g+j=9j_1$. Подставив сюда $j=\frac{1}{20}j_1$, получим: $g=\left(9-\frac{1}{20}\right)j_1$ и, слѣдов., $j_1=\frac{20}{179}g$, а $j=\frac{1}{20}j_1=\frac{1}{179}g$.

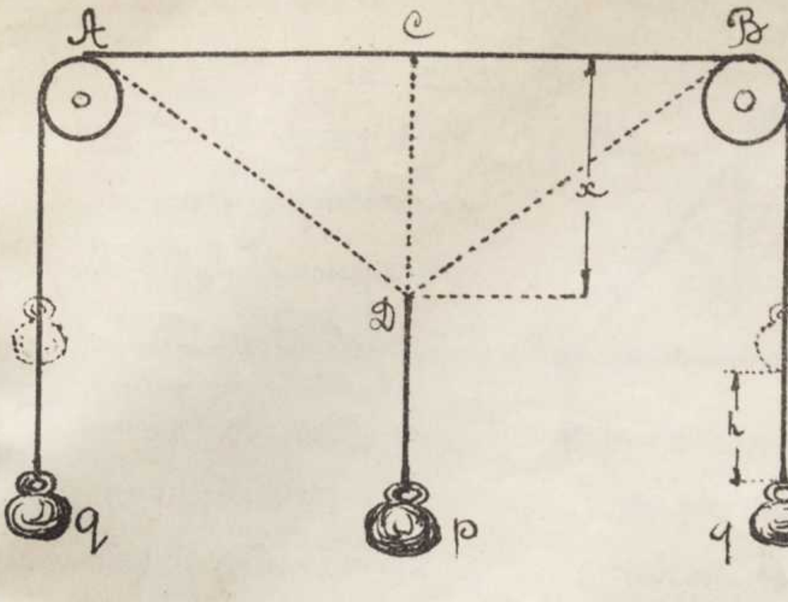
№4. Через неподвижные блоки $\underline{A}$ и $\underline{B}$ перекинут $\underline{шнур}$, поддерживающій подвижный блок $\underline{C}$ (вѣсом блока пренебрегаем). Блок $\underline{C}$ нагружен грузом, вѣс которого с обоймой $P=2$кг. К концам шнура прикрѣплены грузы: $p=1$кг. и $q=1{,}5$кг. Найти ускореніе груза $\underline{P}$. $\underline{Отв.}$ $j=\frac{1}{11}g$.



Рѣш. Блок C имѣет и поступательное движеніе вверх (с ускореніем j) и вращательное около своего центра. Центр блока и груз P движутся вверх с ускореніем j. Точка E блока, кромѣ ускоренія j, имѣет еще ускореніе j_1 вслѣдствіе вращенія; слѣд., точка E, веревка EE_1 и груз q имѣют ускореніе $(j+j_1)$. Точка D имѣет ускореніе $(j_1 - j)$ вниз. Остановив систему, найдем, что на груз P дѣйствует сила $(2 + \frac{2}{g} j)$ вниз, на груз q сила $\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2g}(j+j_1)\right]$, на груз p — сила $\left[1 + \frac{1}{g}(j_1 - j)\right]$. Система имѣет 2 степени свободы. Дав системѣ возможное перемѣщеніе δs, поступательно, найдем: $\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2g}(j+j_1)\right]\delta s + \left[1 + \frac{1}{g}(j_1 - j)\right]\delta s - \left(2 + \frac{2}{g} j\right)\delta s = 0$; $\frac{3}{2} - \frac{3}{2g}(j+j_1) + 1 + \frac{1}{g}(j_1 - j) - \left(2 + \frac{2}{g} j\right) = 0$. Послѣ упрощенія, получим: $g = 9j + j_1$ (I). Дав блоку C вращеніе около центра на угол $\delta\varphi$, так что точки D и E пройдут путь δs_1, — получим: $\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2g}(j+j_1)\right]\delta s_1 - \left[1 + \frac{1}{g}(j_1 - j)\right]\delta s_1 = 0$, откуда: $\frac{3}{2} - \frac{3}{2g}(j+j_1) - 1 - \frac{1}{g}(j_1 - j) = 0$, по упрощеніи: $g = j + 5j_1$ (II). Из ур. (I) и (II) найдем: 1) $5g = 45j + 5j_1$, 2) $g = j + 5j_1$; $4g = 44j$; $j = \frac{1}{11} g$.

№5. На блоки A и B, оси которых расположены на одном уровнѣ, накинута нить, несущая на концах равные грузы q. На среднюю точку C к ней прикрѣпляется груз p и предоставляется самому себѣ. Опредѣлить на сколько опустится груз p.

Отв. $x = \frac{4apq}{4q^2-p^2}$.

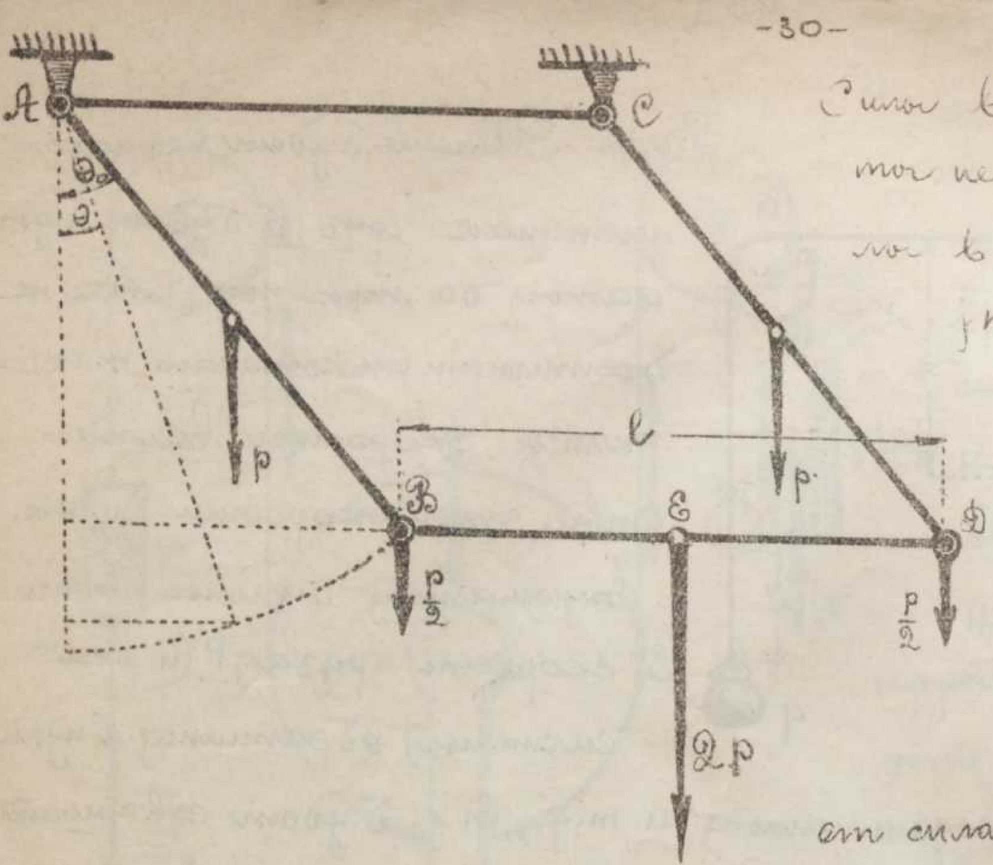


Рѣш. Явленіе будетъ происходить такъ: грузъ P будетъ опускаться до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ нѣкотораго maximum'а скорости; вслѣдствіе этой скорости будетъ опускаться дальше, пока скорость груза P (и всей системы) обратится в нуль; тогда он начнетъ подниматься и т.д., т.е. будетъ совершать колебанія. При самомъ низшемъ положеніи скорость $=0$; слѣд., работа груза P = работѣ грузовъ q. Работа $P=px$. Работа $q = qh = q(BD-BC) = q(\sqrt{x^2+a^2}-a)$; слѣдов.,: $px = 2q(\sqrt{x^2+a^2}-a)$; $px+2qa = 2q\sqrt{x^2+a^2}$; $(px+2qa)^2 = 4q^2(x^2+a^2)$; $p^2x^2+4apqx+4a^2q^2 = 4q^2x^2+4a^2q^2$; $(4q^2-p^2)x^2 = 4apqx$. $[(4q^2-p^2)x-4apq]\cdot x = 0$; $x_1=0$; $(4q^2-p^2)x-4apq=0$; $x = \frac{4apq}{4q^2-p^2}$. (Рѣшеніе $x_1=0$ соотвѣтствуетъ начальному положенію, когда работа тоже нуль).

№6. У ромба, сдѣланнаго изъ 4-хъ одинаковыхъ стержней, соединенныхъ шарнирами, одна сторона закрѣплена неподвижно в горизонтальномъ положеніи. Система отклоняется отъ положенія равновѣсія такъ, что уголъ θ_0 стержней AB и CD с вертикалью весьма малъ и предоставляется себѣ. Найти періодъ колебанія около положенія равновѣсія.

Отв. $T = \pi\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$.

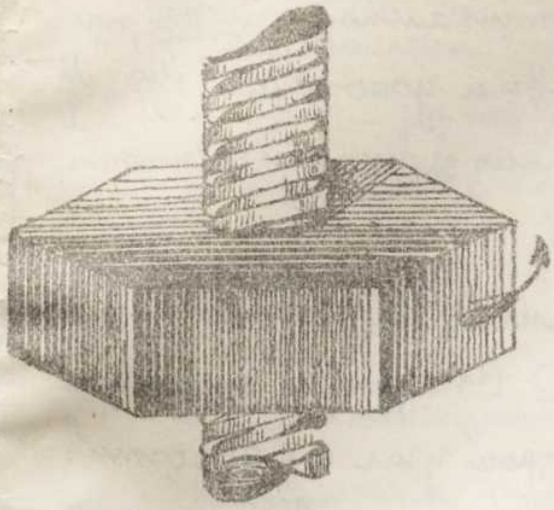
Рѣш. Масса одного стержня пусть будетъ M, а вѣсъ p, такъ что $p = Mg$. Вѣса стержней AB и CD, приложенные в срединѣ, разложимъ на части, приложенныя к концамъ. Тогда в точкахъ A, C, B и D будутъ приложены силы по $\frac{p}{2}$.



Силы въ точкахъ A и C работы не производятъ. Обѣ силы въ B и D имѣютъ равнодѣйствующую P, приложенную въ точкѣ E стержня BD; вмѣстѣ съ собственнымъ вѣсомъ стержня BD — p, получимъ, что въ точкѣ E дѣйствуетъ сила въ $2p$. Стержень BD движется поступательно. Когда стержни AB и CD опустятся, такъ что уголъ съ вертикалью будетъ θ, то точка B, а, слѣд., и стержень BD, опустится на величину $h = l\cos\theta - l\cos\theta_0 = l(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Работа будетъ: $2pl(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Въ началѣ скорость всѣхъ точекъ системы нуль; въ положеніи θ угловая скорость пусть будетъ ω, а скорость точки B (и всего стержня B) — v, такъ что $v = \omega . l$. Пріобрѣтенная живая сила стержня BD будетъ $\frac{Mv^2}{2}$; живая сила стержня AB (и CD) будетъ $I\frac{\omega^2}{2} = \frac{Ml^2}{3}\cdot\frac{\omega^2}{2} = \frac{Mv^2}{6}$. Вся живая сила системы будетъ: $2\cdot\frac{Mv^2}{6} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{5}{6}Mv^2$. По интегралу живыхъ силъ имѣемъ: $2pl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{5}{6}Mv^2$, или $2Mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{5}{6}Mv^2$; $2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{5}{6}v^2$; $v^2 = \frac{6}{5}\cdot 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$; $v = \sqrt{\frac{6}{5}\cdot 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$; но $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(l\theta)}{dt} = l\cdot\frac{d\theta}{dt}$; слѣд., $l\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$ и $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$; $dt = \sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$, откуда находимъ для половины времени колебанія формулу: $\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\right]$. Выраженіе въ скобкахъ есть формула качанія маятника (см. Аналит. мех. стр. 108) и будетъ $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, слѣд., $T = \pi\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$.

№7. На винтъ надѣта массивная гайка; ей сообщена угловая скорость ω по направленію стрѣлки. На к[illegible]ую вы=

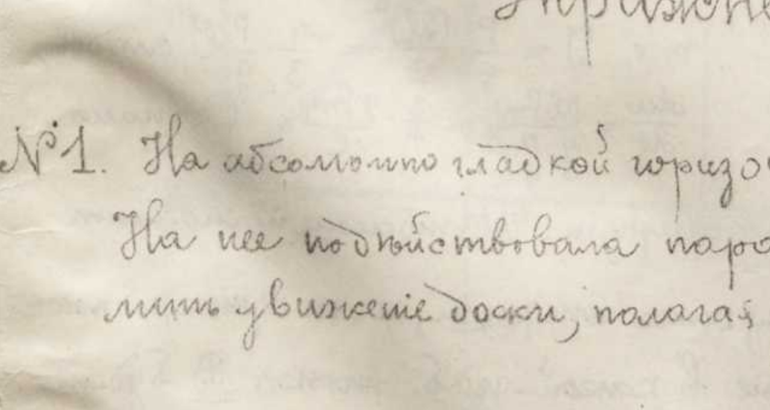
соту поднимется гайки, если считать, что трение отсутствует.
Дано: h — ход винта, r — рад. винта, R — рад. гайки, P — вес гайки, M — масса ея, так что $P = Mg$.



Реш. Кроме угловой скорости вращения ω, гайка будет иметь и поступательную скорость по оси винта v. Эта скорость определится из соотношения: $\frac{v}{\omega} = \frac{h}{2\pi}$; $v = \frac{h}{2\pi}\omega$. Живая сила гайки сложится из живой силы вращательного движения $J\frac{\omega^2}{2}$ и живой силы поступательного движения $\frac{Mv^2}{2}$, т.е. всего: $J\frac{\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$; но $J^{*)} = \gamma\cdot\frac{\pi R^4}{2} - \gamma\frac{\pi r^4}{2} = \gamma\cdot\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)(R^2+r^2) = \frac{M}{2}\cdot(R^2+r^2)$; $v^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\omega^2$; след., живая сила будет: $\frac{M}{4}\omega^2(R^2+r^2) + \frac{Mh^2\omega^2}{8\pi^2} = \frac{M}{4}\omega^2\left(\frac{h^2}{2\pi^2} + R^2+r^2\right)$. Работа при поднятии на высоту x будет: $Px = Mgx$. По теореме живых сил имеем: $Mgx = \frac{M}{4}\omega^2\left(\frac{h^2}{2\pi^2} + R^2+r^2\right)$, откуда $x = \frac{\omega^2}{4g}\left(\frac{h^2}{2\pi^2} + R^2 + r^2\right)$. *) (Гайку для простоты считаем цилиндрической формы)

Упражнение VII.

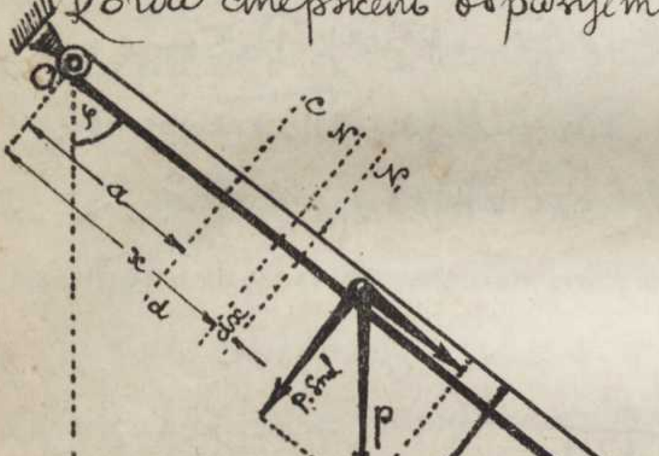
№1. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит доска. На нее подействовала пара сил момента M. Определить движение доски, полагая размеры ея и длину заданными.



Реш.
Так как доска может двигаться только в горизонтальной плоскости N, — силы же, действующие в этой плоскости, сводятся лишь к паре (Q, Q) и, слѣдов., равнодействующая этих сил, не-

ренесенных в центр тяжести доски O, равна нулю, — то примѣняя теорему о движеніи центра тяжести, должны заключить, что: центр тяжести доски O будет находиться в покоѣ и доска будет вращаться около вертикальной оси ZZ, проходящей через центр тяжести, с угловым ускореніем $\frac{d\omega}{dt}=\frac{M}{I_0}$, гдѣ I_0 — момент инерціи доски относительно центра тяжести.

№2. Цилиндрическій однородный стержень, длины $2l$ и вѣса p, имѣет на одном концѣ неподвижный шарнир O. Стержень отклонен от вертикальнаго положенія на нѣкоторый угол и предоставлен самому себѣ. Найти изгибающій момент в сѣченіи cd, отстоящим от точки O на разстояніи a, в тот момент, когда стержень образует с вертикалью $\angle\varphi$.



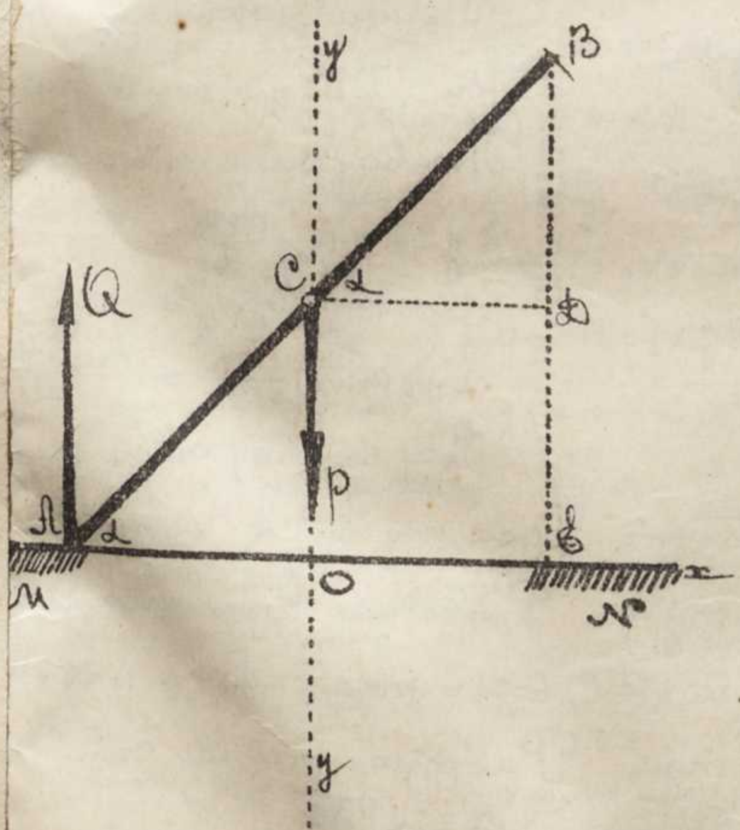
Рѣш.

Момент силы тяжести p стержня относительно точки O будет $p\sin\varphi\cdot l$. Угловое ускореніе стержня будет: $\frac{d\omega}{dt}=\frac{pl\sin\varphi}{I}$, гдѣ I — момент инерціи стержня относительно точки O, т.е. $I=\frac{p}{g}\cdot\frac{(2l)^2}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{p}{g}l^2$, слѣдов., $\frac{d\omega}{dt}=\frac{pl\sin\varphi}{\frac{4}{3}\cdot\frac{p}{g}l^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{g\sin\varphi}{l}$. Остановим систему и приложим силы инерціи. Изгибающій момент дадут только тангенціальныя силы инерціи, а не центробѣжныя. Тангенціальное ускореніе в какой-либ. точкѣ B будет $j_t=\frac{d\omega}{dt}\cdot OB$. Тангенціальныя силы инерціи направлены противоположно j_t и слагающей $p\sin\varphi$. Если возьмем сѣченіе N на разстояніи x от O, то в этом сѣченіи дѣйствует сила инерціи $F=\mu\cdot\frac{d\omega}{dt}x=\gamma dx\cdot\frac{d\omega}{dt}x$, гдѣ $\mu=\gamma dx$, а γ — масса единицы длины стержня. Изгибающій момент от этой силы F в сѣченіи cd будет: $F(x-a)=\gamma\cdot\frac{d\omega}{dt}(x-a)x\,dx$. Изгибающій момент от

весъ силъ инерціи будетъ: $M_1 = \sum \gamma \frac{d\omega}{dt}(x-a)x\,dx = \gamma \frac{d\omega}{dt}\int_a^{2l}(x-a)x\,dx$. Но $\int_a^{2l}(x-a)x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_a^{2l} = \frac{8}{3}l^3 - 2al^2 + \frac{a^3}{6}$; слѣдов., $M_1 = \gamma\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{g\sin\varphi}{l}\cdot\left(\frac{8}{3}l^3 - 2al^2 + \frac{a^3}{6}\right)$. Сгибающій моментъ отъ вѣса части стержня AC въ сѣченіи cd будетъ: $M_2 = \gamma g\frac{(2l-a)^2}{2}\sin\varphi$. Слѣдов., весь моментъ будетъ: $M = M_1 - M_2 = \gamma\cdot g\sin\varphi\cdot\frac{3}{4l}\left(\frac{8}{3}l^3 - 2al^2 + \frac{a^3}{6}\right) - \gamma g\sin\varphi\left(2l^2 - 2ab + \frac{a^2}{2}\right)$; $M = \gamma g\sin\varphi\left(\frac{al}{2} + \frac{1}{8}\frac{a^3}{l} - \frac{a^2}{2}\right) =$
$= \frac{\gamma g\sin\varphi}{8l}\left(4al^2 + a^3 - 4a^2l\right) = \frac{\gamma g\cdot 2l\sin\varphi}{16l^2}\left(4al^2 + a^3 - 4a^2l\right) =$
$= p\sin\varphi\,\frac{a}{16l^2}\left(4l^2 + a^2 - 4al\right)$.

3. На абсолютно гладкую плоскость MN поставлена въ наклонномъ положеніи палка AB, длиною l и предоставлена самой себѣ. Какую кривую опишетъ свободный конецъ B палки при ея паденіи подъ вліяніемъ вѣса.

Отв. $\frac{x^2}{l^2/4} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

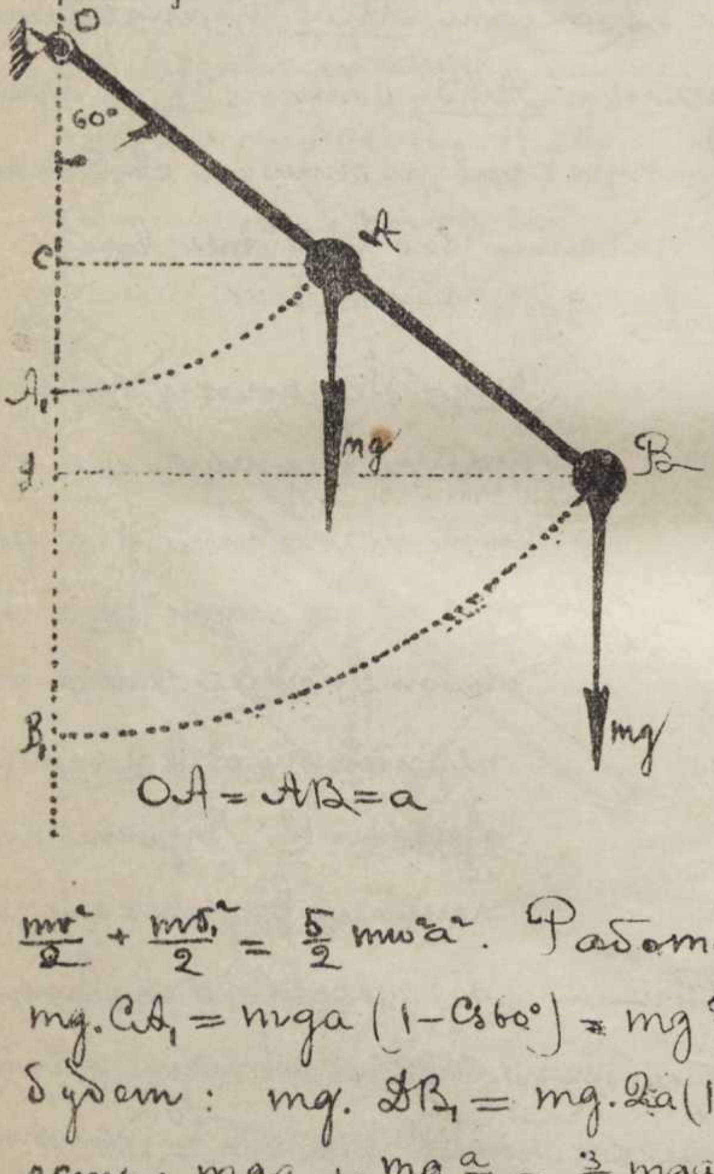


Рѣш. На палку дѣйствуютъ только вертикальныя силы: сила тяжести P и реакція плоскости Q. Равнодѣйствующая этихъ силъ, пересѣченныхъ въ центрѣ тяжести C, будетъ направлена по вертикали; слѣд., по теоремѣ о движеніи центра тяжести находимъ, что точка C должна двигаться по вертикали yy. Обозначивъ уголъ BAx черезъ α, находимъ координаты точки B: $x = CD = \frac{l}{2}\cos\alpha$ и $y = BE = l\sin\alpha$; $\frac{x}{l/2} = \cos\alpha$ и $y : l = \sin\alpha$. Возведя въ квадратъ и сложивъ, получимъ $x^2 : \frac{l^2}{4} + \frac{y^2}{l^2} = 1$. Это и есть ур. кривой, по которой движет=

у точки B.

№4. Двѣ матеріальныя точки, массы m каждая, прикрѣплены к твердому невѣсомому стержню, длины $2a$, имѣющему неподвижную точку O; одна на концѣ его, другая на срединѣ. Стержень отклонен на $60°$ от вертикали и предоставлен самому себѣ. Найти угловую скорость, с которой стержень пройдет положение равновѣсія.

Отв. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{5a}}$.

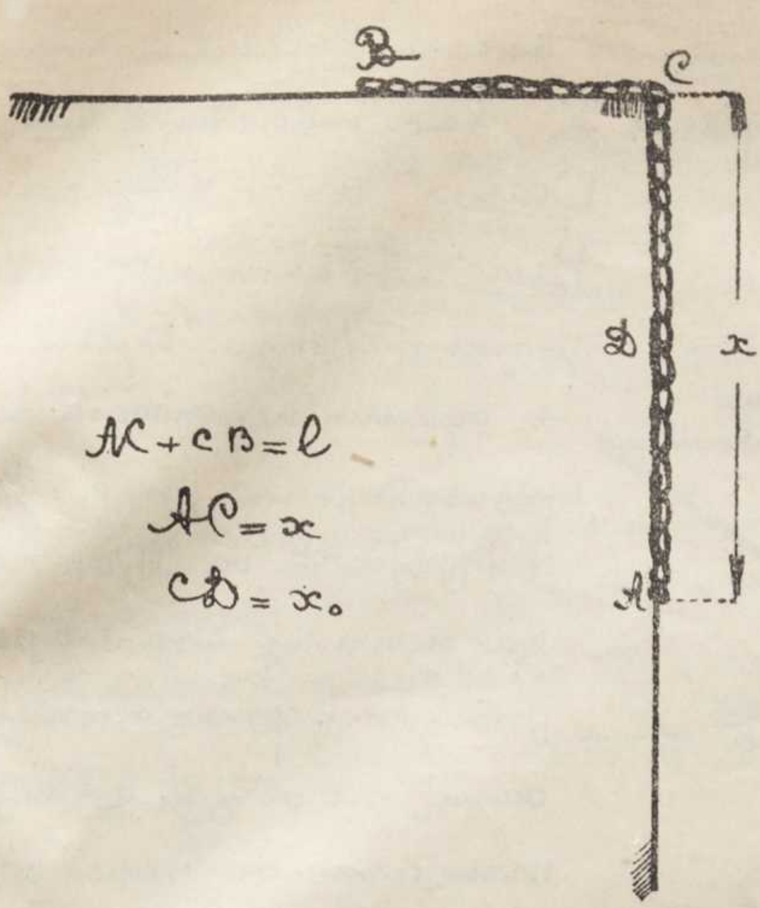


$OA = AB = a$

Рѣш. Применим интеграл живых сил. Скорость точки A при прохожденіи через положеніе равновѣсія будет $v = \omega a$; скорость точки B будет: $v_1 = \omega.2a$. Живая сила точки A будет: $\frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2a^2}{2}$; живая сила точки B будет: $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{m\omega^2 4a^2}{2}$. Вся живая сила равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{5}{2} m\omega^2a^2$. Работа вѣса точки A есть $mg.CA_1 = mga(1-\cos 60°) = mg\frac{a}{2}$. Работа вѣса точки B будет: $mg.DB_1 = mg.2a(1-\cos 60°) = mga$. Вся работа есть: $mga + mg\frac{a}{2} = \frac{3}{2}mga$. Работа равна живой силѣ, слѣдов., $\frac{5}{2}m\omega^2a^2 = \frac{3}{2}mga$; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{5a}}$.

№5. Найти закон движенія тяжелой однородной цѣпочки, свѣсившейся от края горизонтальнаго стола.

Рѣш. Найти закон движенія, значит найти зависимость пути от времени: $x = f(t)$. Пусть в дан=



$AC + CB = l$

$AC = x$

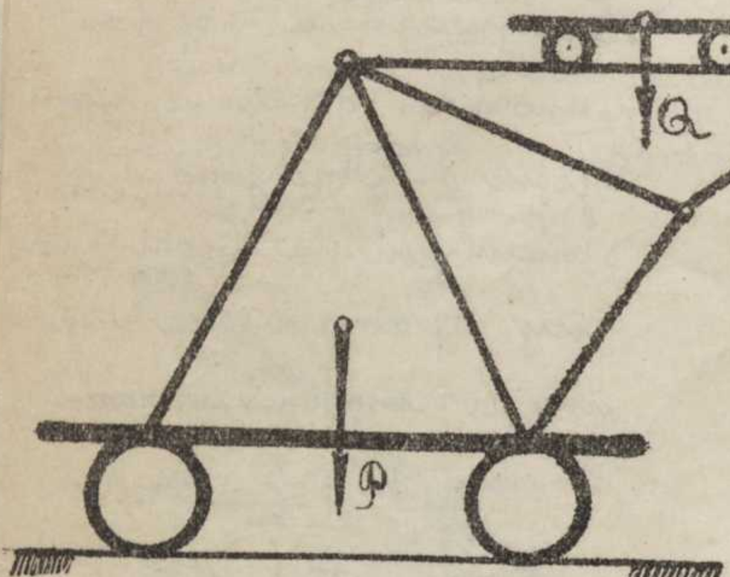
$CD = x_0$

ный моментъ t свѣшивалась внизъ часть $AC = x$. Если вѣсъ всей цѣпочки P, то вѣсъ части AC будетъ $\frac{px}{l}$. Этотъ вѣсъ и есть движущая сила для всей цѣпочки. Ускореніе пусть будетъ j. Это ускореніе дѣйствуетъ на всю цѣпочку. Остановимъ систему и приложимъ силу движущую $p\cdot\frac{x}{l}$ и силы инерціи $\frac{p}{g}\cdot j$. Тогда получимъ равновѣсіе: $p\frac{x}{l} - \frac{p}{g}j = 0$; откуда: $j = g\frac{x}{l}$. Но $j = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v$; слѣдов., $\frac{dv}{dx}\cdot v = \frac{g}{l}x$; $vdv = \frac{g}{l}xdx$; $\int vdv = \int\frac{g}{l}xdx$; $\frac{v^2}{2} = \frac{g}{l}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1$. Въ началѣ, при $x = x_0$, $v = v_0 = 0$; слѣд., $0 = \frac{g}{l}\cdot\frac{x_0^2}{2} + C_1$; $C_1 = -\frac{g}{l}\cdot\frac{x_0^2}{2}$, а потому: $\frac{v^2}{2} = \frac{g}{l}\cdot\frac{(x^2 - x_0^2)}{2}$, откуда: $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{x^2 - x_0^2}$. Раздѣляемъ перемѣнныя: $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \int\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt$; $lg(x + \sqrt{x^2 - x_0^2}) = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t + C_2$. При $t = 0$, $x = x_0$ и мы имѣемъ: $lg\, x_0 = C_2$; слѣдов., $lg(x + \sqrt{x^2 - x_0^2}) - lg\, x_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t$, или: $lg\frac{x + \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0} = t\sqrt{\frac{g}{l}}$, откуда: $\frac{x + \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0} = e^{t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}}$ (I). Такъ какъ $\frac{x + \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0}\cdot\frac{x - \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0} = 1$, то, слѣдов., $\frac{x - \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0} = \frac{1}{e^{t\sqrt{g/l}}} = e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}$ (II). Сложивъ ур. (I) и (II), получимъ: $\frac{2x}{x_0} = e^{t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}$, откуда находимъ, что $x = \frac{x_0}{2}\left(e^{t\cdot\sqrt{g/l}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$. Это и есть искомый законъ движенія

№6. Грузовая тележка подвижного крана (могущая двигаться по рельсамъ) перемѣщается по вылету съ относительной скоростью v. Съ какой скоростью u отка=

тывается кран, если пренебречь всеми вредными сопротивлениями. Вѣс крана P, вѣс тележки Q.

Отв. $u = v\cdot\frac{Q}{P+Q}$.



Рѣш. Абсолютная скорость тележки будет = = суммѣ переносной и относительной, т.е. будет $u+(-v)=u-v$. Так как на систему дѣйствуют только вертикальныя силы, то общій центр тяжести системы остается неподвижным, т.е. $M\frac{d\bar{x}}{dt}=0$; но $M\cdot\frac{d\bar{x}}{dt}=\Sigma m\frac{dx}{dt}$; слѣд., $\Sigma m\frac{dx}{dt}=0$, или: $\frac{P}{g}u+\frac{Q}{g}(u-v)=0$; $(P+Q)u=Q\cdot v$; $u=v\cdot\frac{Q}{P+Q}$.

Упражненіе VIII.

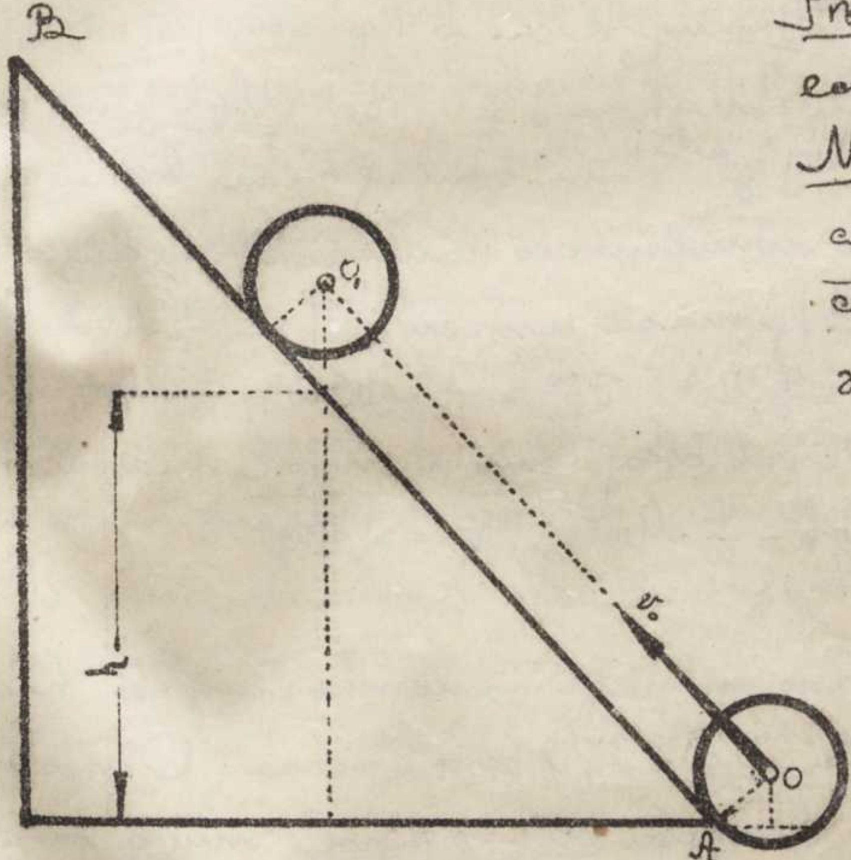
№1. Для опредѣленія момента тренія цапфы на ось насажен маховик, момент инерціи котораго $= J$. Маховик сначала был разогнан до угловой скорости ω_0, а затѣм предоставлен самому себѣ; через T sec. он остановился. Опредѣлить момент тренія, предполагая треніе постоянным.

Отв. $M = J\cdot\frac{\omega_0}{T}$.

Рѣш. Для вращательнаго движенія имѣем из Аналитич. мех. слѣдующую формулу: $\frac{d\omega}{dt}=\frac{M}{J}$, гдѣ $\frac{d\omega}{dt}$ есть угловое ускореніе, а M вращающій момент. В данном случаѣ $\frac{d\omega}{dt}<0$ (движеніе замедляется); слѣдоват.,

$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{J}$, гдѣ M, моментъ тренія, по условію постоянный. Изъ этого ур. находимъ: $d\omega = -\frac{M}{J}dt$; $\omega = -\int \frac{M}{J}dt$; $\omega = -\frac{M}{J}t + C$. Въ начальный моментъ, при $t=0$, $\omega = \omega_0$, слѣд., $\omega_0 = C$, а потому: $\omega = -\frac{M}{J}t + \omega_0$. При $t = T$, $\omega = 0$, такъ какъ маховикъ остановился, слѣдов., получаемъ: $0 = -\frac{M}{J}T + \omega_0$, откуда $M = J\frac{\omega_0}{T}$.

№2. На какую высоту можетъ вкатиться по наклонной плоскости дискъ, центръ котораго въ начальный моментъ обладаетъ скоростью v_0 (параллельной наклонной плоскости). Отв. $h = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}$.



Рѣш. Радіусъ диска есть r, масса его M. Дискъ катится по наклонной плоскости безъ скольженія; мгновенный полюсъ вращенія находится въ точкѣ A соприкосновенія съ плоскостью. Если угловую скорость этого вращенія обозначимъ черезъ ω_0, то имѣемъ равенство: $v_0 = \omega_0 r$. Живая сила диска въ начальный моментъ, какъ живая сила при вращательномъ движеніи, выразится такъ: $\sum \frac{mv^2}{2} = J\frac{\omega_0^2}{2}$, гдѣ J есть моментъ инерціи относительно точки A. По теоремѣ о моментахъ инерціи имѣемъ: $J = J_0 + Mr^2$, гдѣ J_0 есть моментъ инерціи относительно центра O;

для диска имѣем: $I_0 = \frac{Mr^2}{2}$, слѣд., $I = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$; живая сила диска, таким образом, будет: $\Sigma \frac{mv^2}{2} =$ $= \frac{3}{2} Mr^2 \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{3}{4} M(r.\omega_0)^2 = \frac{3}{4} Mv_0^2$. Когда центр диска, потерявшаго живую силу, поднимется на высоту h, сила тяжести произведет работу Mgh; по теоремѣ живых сил имѣем: $Mgh = \frac{3}{4} Mv_0^2$; $h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2}{g}$

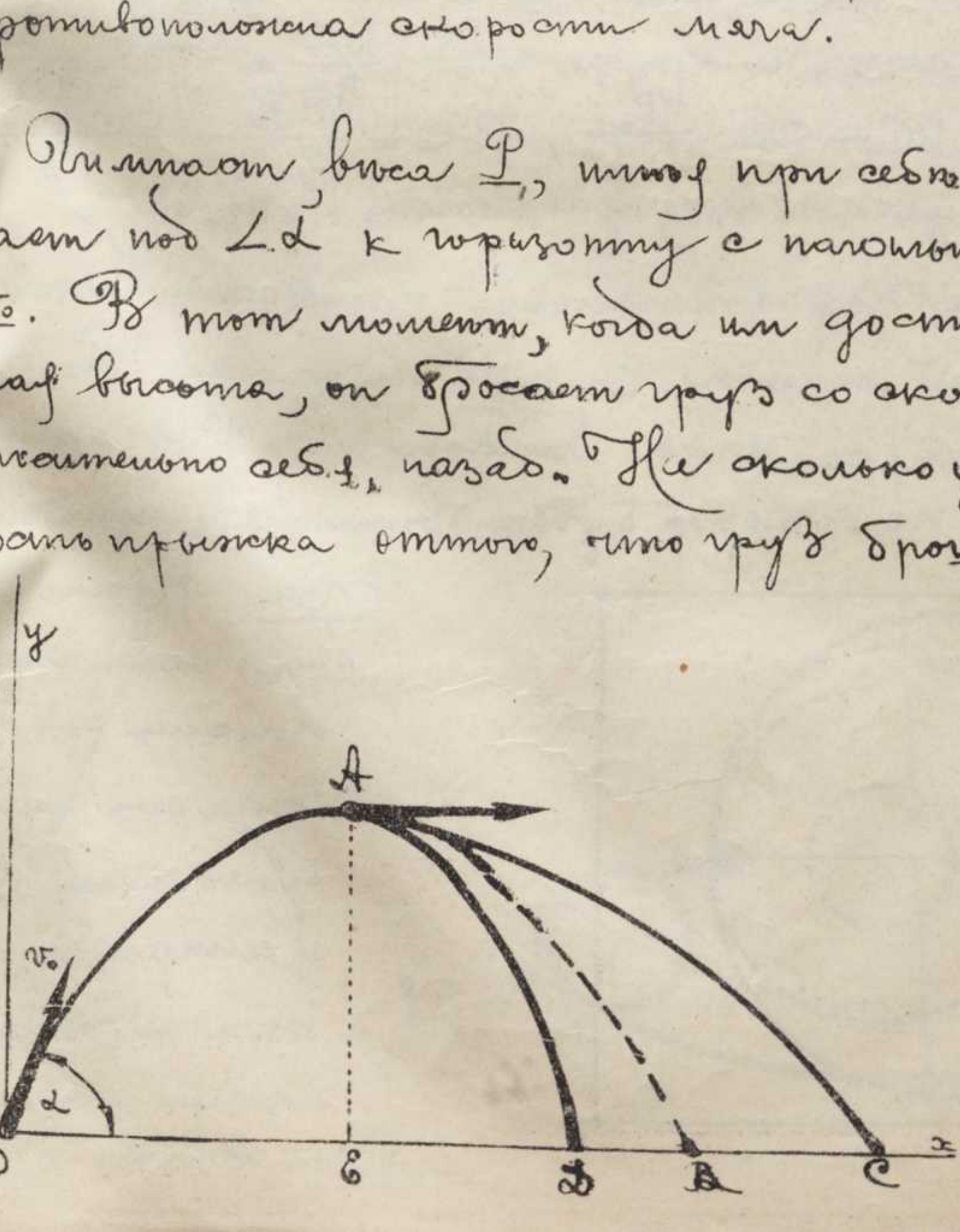
№3. С какой скоростью будет двигаться шар, если в начальном положеніи он покоится на наклонной плоскости, а затѣм, предоставленный самому себѣ, опускается на высоту h. Отв. $v=\sqrt{\frac{10}{7}gh}$.

Рѣш. Подобно тому, как в предыдущей задачѣ с диском, имѣем: $Mgh = I\frac{\omega^2}{2}$, гдѣ Mgh есть работа вѣса шара, а $I\frac{\omega^2}{2}$ есть живая сила вращательнаго движенія около мгновеннаго полюса вращенія. Но $I = I_0 + Mr^2$. Для шара имѣем: $I_0 = \frac{2}{5} Mr^2$, слѣдов., $I = \frac{2}{5} Mr^2 + Mr^2 = \frac{7}{5} Mr^2$; $I\frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}Mr^2\omega^2 = \frac{7}{10}Mv^2$, так как $r\omega = v$, гдѣ v есть скорость центра шара. Таким образом, $Mgh = \frac{7}{10}Mv^2$; $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$.

№4. Два лица стоят на абсолютно гладкой плоскости на разстояніи a друг от друга. Одно из них бросает мяч, массы m; другое лицо подхватывает мяч через t sec. Показать, что бросившій мяч начнет скользить по плоскости со скоростью $\frac{ma}{Mt}$, гдѣ M — собственная масса.

Рѣш. Мяч движется равномѣрно с нѣкоторой скоростью v, которая опредѣляется из равенства $v=\frac{a}{t}$. Человѣк, бросивши мяч, вначалѣ находился в точкѣ A вмѣстѣ с мячем в покоѣ. Движение мяча явилось слѣдствием усилий лица A, которое, по отношению к этой системѣ (лицо A и мяч), является внутреннею силою, а потому их общий центр тяжести, как извѣстно из Аналитич. мех., должен находиться в покоѣ. Если координата центра тяжести есть $\bar{x}$, то, слѣдов., $\bar{x}=const$. Но $\bar{x}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$, а потому $\frac{d\bar{x}}{dt}=\frac{\Sigma m\frac{dx}{dt}}{\Sigma m}$; но $\frac{d\bar{x}}{dt}=0$, так как $\bar{x}$ — const.; слѣдов., $\Sigma m\frac{dx}{dt}=0$, гдѣ $\frac{dx}{dt}$ есть скорость. В данном случаѣ, для мяча масса есть m, скорость $v=\frac{a}{t}$; для человѣка масса — M, неизвѣстная скорость пусть будет v_1. По сказанному имѣем: $\Sigma m\frac{dx}{dt}=mv+Mv_1=0$, откуда $v_1=-\frac{mv}{M}=-\frac{ma}{Mt}$. Знак минус показывает, что скорость человѣка будет противоположна скорости мяча.

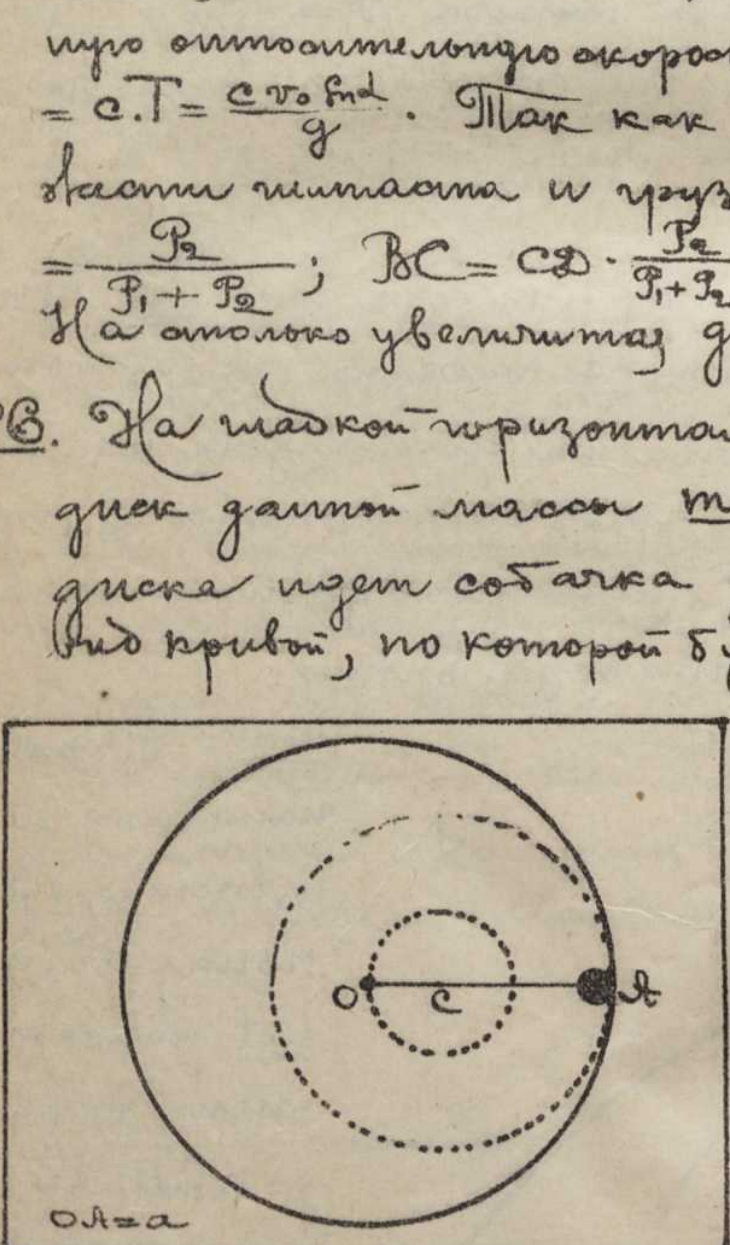
Р5. Гимнаст, вѣса P, имѣя при себѣ груз P_e, прыгает под $\angle\alpha$ к горизонту с начальною скоростью v_0. В тот момент, когда им достигнута наибольшая высота, он бросает груз со скоростью c, относительно себя, назад. На сколько увеличилась дальность прыжка оттого, что груз брошен.



Рѣш. Движение гимнаста, как извѣстно, будет по параболѣ OA по формулам: $x=v_0\cos\alpha t$, $y=v_0\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}$. Время поднятия до высшей точки A

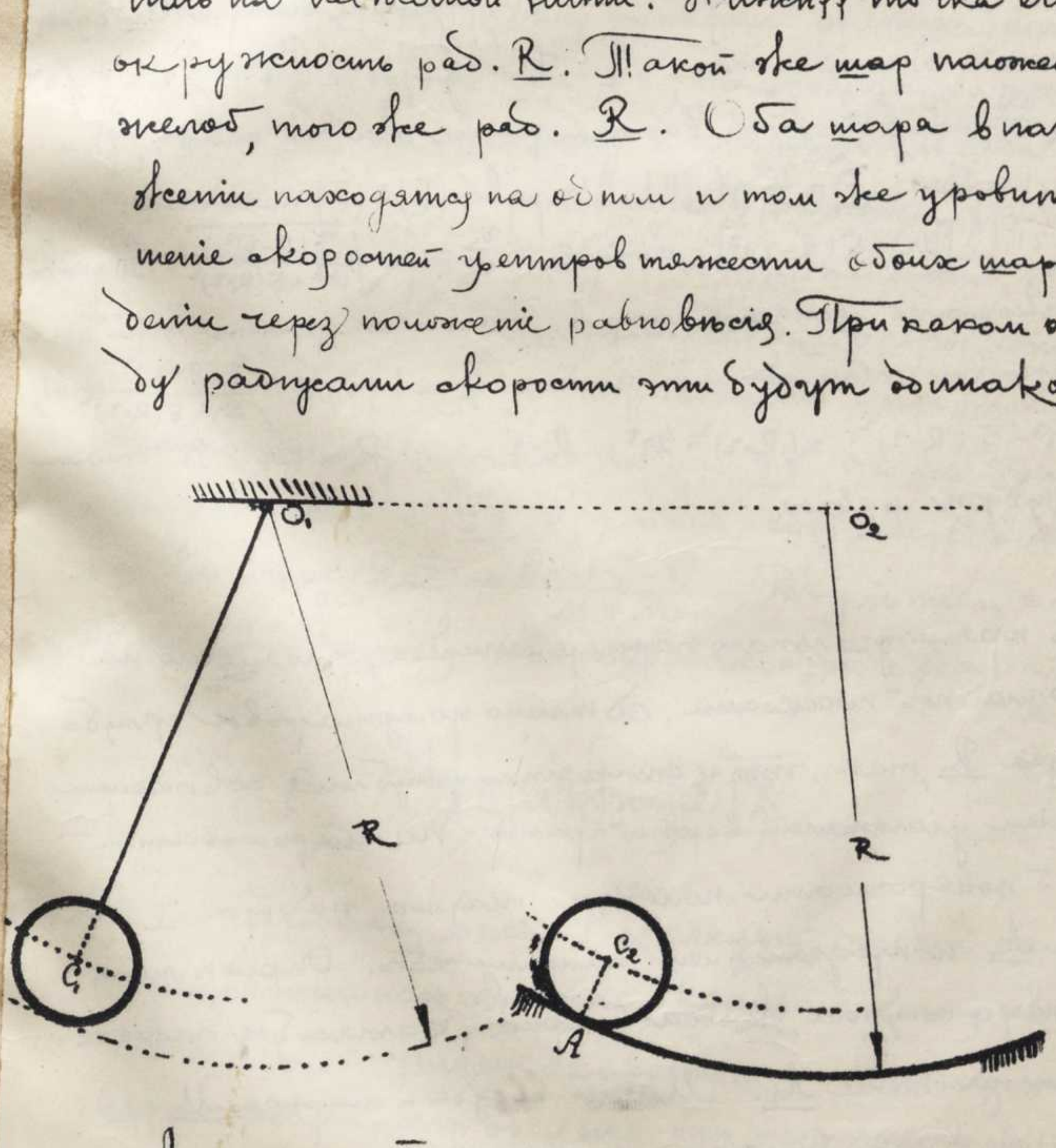
опредѣляется из рав.: $v_0 \sin\alpha - gt = 0$; $t = T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Время паденія = времени поднятія. Когда гимнаст находится в A, то скорость $\parallel$ горизонту (линіи Ox). Относительная скорость c, слѣдов., также горизонтальна. Движеніе груза относительно гимнаста есть слѣдствіе внутренних сил системы: гимнаст–груз; слѣдоват., общій центр тяжести их будет продолжать описывать параболу AB, продолженіе AO, как если бы они не раздѣлялись. Сам же гимнаст пойдет по вѣтви AC, а груз по параболѣ AD. Гимнаст очутится в C, а груз в D, – конечно, одновременно (так как время паденія не зависит от массы); их общій центр тяжести в B. Разстояніе CD, на которое гимнаст опередил груз, является слѣдствіем того, что груз имѣет горизонтальную относительную скорость c назад; слѣд., $CD = c.T = \frac{c v_0 \sin\alpha}{g}$. Так как B есть общій центр тяжести гимнаста и груза, то: $\frac{BC}{BD} = \frac{P_2}{P_1}$; $\frac{BC}{BC+BD} = \frac{P_2}{P_1+P_2}$; $BC = CD \cdot \frac{P_2}{P_1+P_2}$; $BC = \frac{P_2}{P_1+P_2} \cdot \frac{c v_0 \sin\alpha}{g}$.
На столько увеличится дальность прыжка.

№6. На гладкой горизонтальной плоскости лежит диск данной массы m и радіуса a. По краю диска идет собачка массы m'. Опредѣлить вид кривой, по которой будет двигаться центр диска.



Рѣш. Пусть A есть начальное положеніе собачки, когда она начала двигаться. Общій центр тяжести диска и собачки в этот момент будет в C, при чем $\frac{CO}{CA}=\frac{m'}{m}$, слѣд. $CO=\frac{am'}{m+m'}$, $CA=\frac{am}{m+m'}$. Въ началѣ общiй центръ тяжести $\underline{C}$ находился въ покоѣ. Такъ какъ на систему дѣйствуютъ только вертикальныя силы тяжести, проекцiя которыхъ на горизонтальную плоскость равна нулю, то центръ тяжести системы $\underline{C}$ долженъ оставаться въ покоѣ, а потому центръ диска $\underline{O}$ будетъ двигаться около $\underline{C}$ и, такъ какъ $CO=\frac{am'}{m+m'}$ есть величина постоянная, то, слѣдов., центръ диска $\underline{O}$ будетъ описывать окружность радiуса $\underline{CO}=$ $=\frac{am'}{m+m'}$ и центра $\underline{C}$. Точно также собачка $\underline{A}$ въ абсолютномъ движенiи опишетъ окружность рад. $CA=\frac{am}{m+m'}$

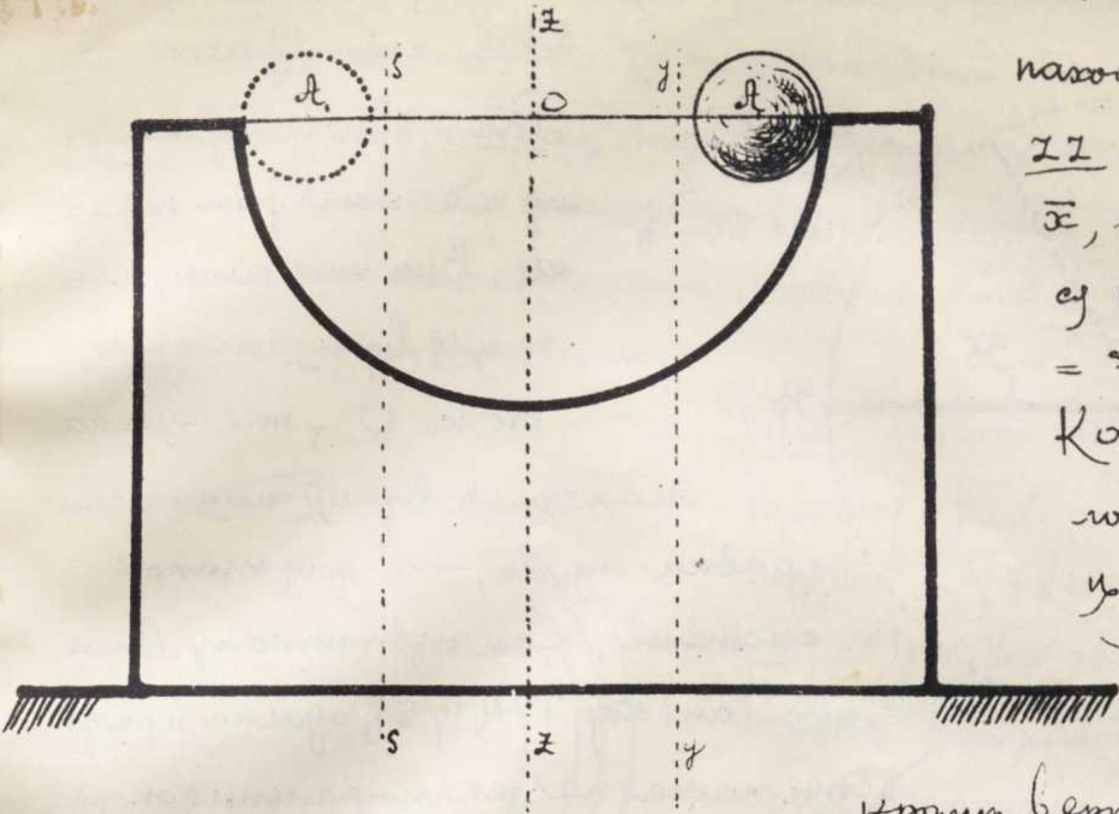
№7. Маятникъ состоитъ изъ шара, вѣса $\underline{P}$ и рад. $\underline{r}$, подвѣшеннаго на невѣсомой нити. Нижняя точка его описываетъ окружность рад. $\underline{R}$. Такой же шаръ положенъ въ круговой желобъ, того же рад. $\underline{R}$. Оба шара въ начальномъ положенiи находятся на одномъ и томъ же уровнѣ. Каково отношенiе скоростей центровъ тяжести обоихъ шаровъ при прохожденiи черезъ положенiе равновѣсiя. При какомъ отношенiи между радiусами скорости эти будутъ одинаковы.



Рѣш. Центры шаровъ, при прохожденiи через положенiе равновѣсiя, опустятся на нѣкоторую высоту $\underline{h}$; слѣд., работа, при этомъ совершенная, будетъ для как даго шара будетъ Ph. Вычислимъ живую силу ихъ. Для маятника O_1, который вращается около точки O_1, живая сила будетъ: $\Sigma \frac{mv^2}{2} = J_1 \cdot \frac{\omega_1^2}{2}$, гдѣ J_1 есть моментъ инерцiи относительно O_1, а ω_1 — угловая скорость вращенiя около O_1. Если скор. центра C_1 будетъ v_1, то $v_1 = \omega_1 \cdot O_1C_1 = \omega_1 (R-r)$. По теоремѣ о моментѣ инерцiи находимъ: $J_1 = J_0 + \frac{P}{g}(R-r)^2$, гдѣ J_0 — моментъ инерцiи относительно центра C_1 шара и, слѣдов., $J_0 = \frac{2}{5}\frac{P}{g}r^2$ и $J_1 = \frac{2}{5}\frac{P}{g}r^2 + \frac{P}{g}(R-r)^2$. Живая сила $J_1\frac{\omega_1^2}{2} = J_1\frac{v_1^2}{2(R-r)^2} = \frac{P}{g}\left[\frac{2}{5}r^2 + (R-r)^2\right]\frac{v_1^2}{2(R-r)^2} = \frac{P}{g}\left[2r^2 + 5(R-r)^2\right]\frac{v_1^2}{10(R-r)^2}$. Работа = живой силѣ: $Ph = \frac{P}{g}\left[2r^2 + 5(R-r)^2\right]\frac{v_1^2}{10(R-r)^2}$; откуда $v_1 = \frac{gh.10(R-r)^2}{2r^2+5(R-r)^2}$ (I). Для второго шара C_2 имѣемъ: $\Sigma\frac{mv^2}{2} = J_2\frac{\omega_2^2}{2}$, гдѣ J_2 — моментъ инерцiи относительно мгновеннаго полюса вращенiя A и ω_2 — угловая скор. вращенiя около этого полюса. Если скорость центра C_2 будетъ v_2, то $v_2 = \omega_2 r$. Далѣе имѣемъ: $J_2 = J_0 + \frac{P}{g}r^2 = \frac{2}{5}\frac{P}{g}r^2 + \frac{P}{g}r^2 = \frac{7}{5}\frac{P}{g}r^2$. Слѣдов., $J_2\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{7}{5}\frac{P}{g}r^2\cdot\frac{v_2^2}{2r^2}$. Работа равна живой силѣ: $Ph = \frac{7}{10}\frac{P}{g}v_2^2$; откуда: $v_2^2 = \frac{10}{7}gh$ (II). Изъ рав. (I) и (II) находимъ: $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \left[7(R-r)^2\right] : \left[2r^2 + 5(R-r)^2\right]$; слѣдов., $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{7(R-r)^2}{2r^2+5(R-r)^2}}$. Таково отношенiе скоростей центровъ шаровъ. Чтобы скорости эти были одинаковы, необходимо, чтобы $\frac{v_1}{v_2} = 1$, т.е. $\frac{7(R-r)^2}{2r^2+5(R-r)^2} = 1$; $7(R-r)^2 = 2r^2 + 5(R-r)^2$; $2(R-r)^2 = 2r^2$; $R - r = r$; $R = 2r$. В этомъ скорости будутъ равны.

№8. Въ массѣ прямоугольнаго параллелепипеда, стоящаго на абсолютно гладкой плоскости, сдѣлано полушаровое углубленiе, радiуса R, такъ, что центръ этого углубленiя совпадаетъ съ пересѣченiемъ дiагоналей верхней грани. На шероховатой внутренней поверхности положенъ шарикъ, радiуса r, въ положенiи A и предоставленъ самому себѣ. Опредѣлить, что сдѣлается съ сосудомъ, когда шарикъ, катясь безъ скольженiя, займетъ положенiе A_1. Массы сосуда и шарика M и m.

Рѣш. Когда въ сосудѣ положенъ шарикъ A, то общiй центръ

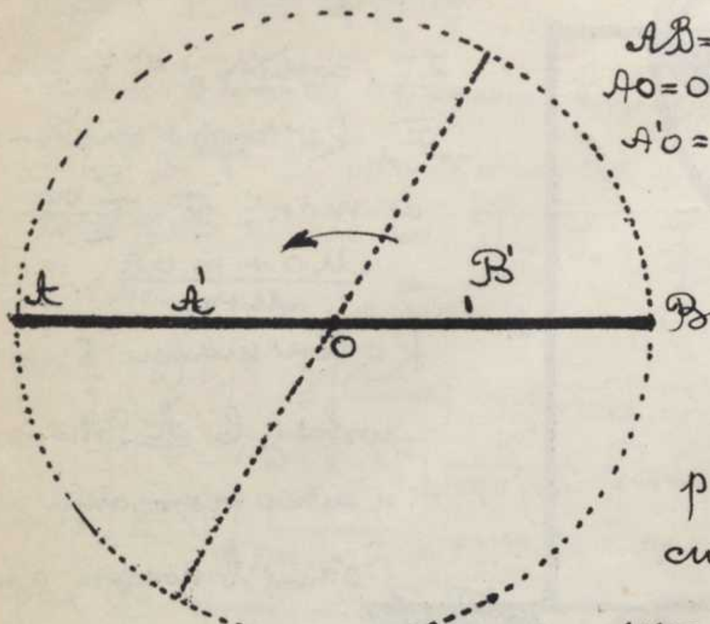


тяжести системы будет находиться правее оси ZZ сосуда на величину $\bar{x}$, которая определится так: $\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{M.0 + m.OA}{M+m} = \frac{m(R-r)}{M+m}$. Когда шарик был положен в A, то общий центр тяжести находился в покое, а так как внешних сил, кроме вертикальных, не имеется, то этот общий центр тяжести должен остаться в покое, т.е. находиться на оси YY, отстоящей от начального положения оси ZZ на величину $\bar{x} = \frac{m(R-r)}{M+m}$. Когда шарик придет в A_1, то общий центр тяжести в системе займет положение слева от средней линии сосуда на линии SS, отстоящей от ZZ также на $\bar{x}$; но так как с другой стороны, как мы видели, общий центр тяжести в пространстве должен оставаться неподвижным на оси YY, то ось SS должна будет совпасть с YY и, след., сосуд передвинется вправо на величину $2\bar{x} = \frac{2m(R-r)}{M+m}$. Результат не изменится, если внутренняя поверхность сосуда будет гладкая.

Упражнение IX.

№1. Два человека, веса P каждый, стоят на концах горизонтального стержня, вращающегося около средней точки O, с угловой скоростью ω. Как изменится угловая скорость, если оба они займут положение на средних отрѣзков OA и OB. Вѣс стержня также равен P.

Отв. $\omega' = \frac{14}{5}\omega$.



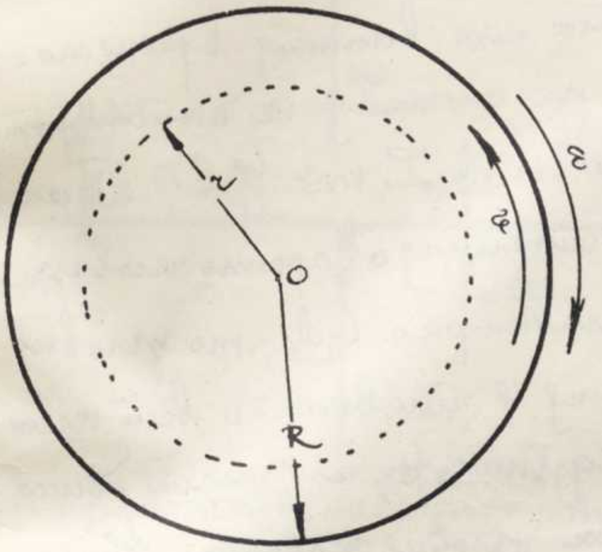
$AB = l$
$AO = OB = \frac{l}{2}$
$A'O = B'O = \frac{l}{4}$

Рѣш. На нашу систему не дѣйствуют никакия внѣшния силы, могущия вращать около точки O, — т.е. сумма моментов вращающих сил равна нулю, — а для такой системы, как извѣстно из Анал. мех. (см. стр 174, 175), сумма произведений масс на секторальныя скорости равна постоянной величинѣ: $\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma}{dt} = C$. Напишем это выраж. в другом видѣ: $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}$; $2\sum m\frac{d\sigma}{dt} = \sum mr^2\frac{d\varphi}{dt} = C$. Так как $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, то имѣем: $\sum mr^2\cdot\omega = \omega\sum mr^2 = \omega.J = C$, то есть произведение угловой скорости на момент инерции всей системы = нѣкоторой постоянной.

В нашей задачѣ, в $1^{м}$ случаѣ, когда оба человѣка находились в A и B, угловая скор. $= \omega$, а $J = J_0 + 2J_1$, гдѣ J_0 есть момент инерции стержня AB, который будет: $J_0 = \frac{P}{g}\frac{l^2}{12}$, а $J_1 = \frac{P}{g}\left(\frac{l}{2}\right)^2$ — есть момент инерции одного человѣка, слѣдов. $J = \frac{1}{12}\cdot\frac{P}{g}l^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}l^2 = \frac{7}{12}\frac{P}{g}l^2$; таким образом $C = \omega.J = \frac{7}{12}\frac{P}{g}l^2\cdot\omega$. Когда оба лица займут положение A' и B', то угл. скор. будет ω', а момент инерции будет: $J' = J_0 + 2J_1' = \frac{1}{12}\frac{P}{g}l^2 + 2\frac{P}{g}\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}\frac{P}{g}l^2$. Но по-прежнему должно быть $J'\cdot\omega' = C$. Подставив значение C, получим $\frac{5}{24}\frac{P}{g}l^2\cdot\omega_1 = \frac{7}{12}\frac{P}{g}l^2\cdot\omega$; откуда $\omega' = \frac{14}{5}\omega$. Такова будет новая угловая скорость.

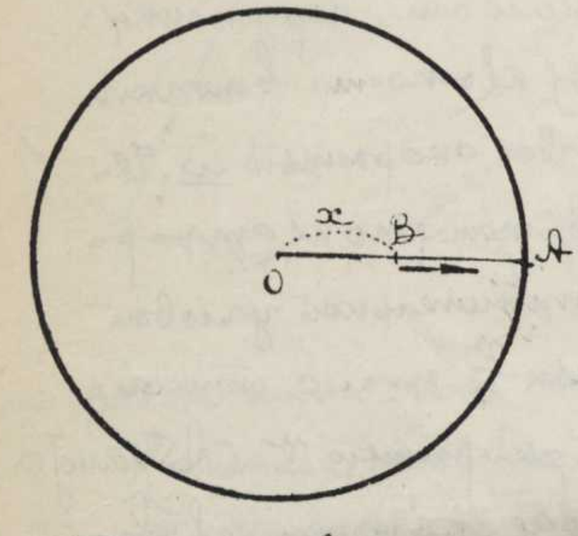
№2. По круглой горизонтальной платформѣ, могущей вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей—

через ея центр, идет с постоянной относительной скоростью v по окружности, рад. r, человек веса p. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа около оси, если вес ея P можно считать распределенным по площади и рад. R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю.



Реш. Пусть платформа вращается около оси, перпендикулярной в ея плоскости в точке O, с угловой скоростью ω. Человек движется по платформе с относительной угловой скоростью $\frac{v}{r}$ и м. с относительной скоростью v. Абсолютная угловая скорость человека сложится из относительной и переносной. Назовем ее через ω_1. Здесь на систему также не действуют внешние вращающие силы, а потому, по предыдущему, должно быть: $\sum mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$; $\sum mr^2 \omega + \sum mr^2 \omega_1 = C$; $\omega J + \omega_1 J_1 = C$, где J — есть момент инерции платформы, а J_1 — момент инерции человека. Но в начале ω и ω_1 равнялись нулю; след., $C = 0$, и мы получаем: $\omega J + \omega_1 J_1 = 0$; $\omega_1 = -\frac{J}{J_1}\omega$. J и J_1 существенно положительные числа; если направление вращения ω будем считать положительным, то ω_1 будет отрицательно, т.е. будет противоположного направления. Так как ω_1 слагается из относит. скор. $\frac{v}{r}$ и переносной ω, то, очевидно, направление $\frac{v}{r}$ или v противоположно направлению ω; таким образом имеем: $\omega_1 = \omega + \left(-\frac{v}{r}\right) = \omega - \frac{v}{r}$. Равенство $J\omega + J_1\omega_1 = 0$ примет вид: $J\omega + J_1\left(\omega - \frac{v}{r}\right) = 0$; $(J + J_1)\omega = J_1\frac{v}{r}$. Подставив: $J = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}$, $J_1 = \frac{p}{g}r^2$, получим $\left(\frac{P}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{p}{g}r^2\right)\omega = \frac{p}{g}rv$, откуда $\omega = \frac{2prv}{PR^2 + 2pr^2}$.

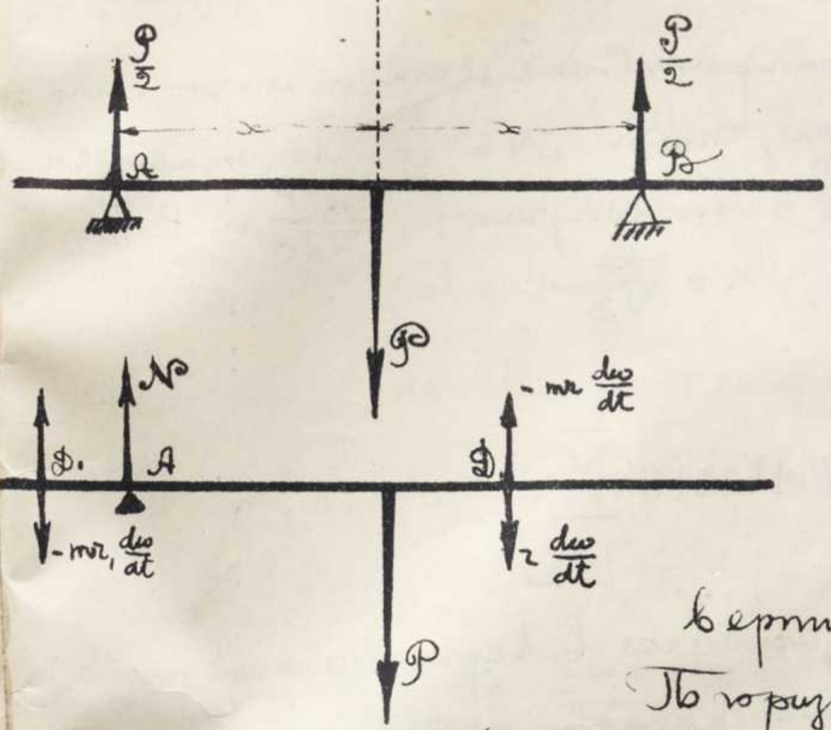
№3. По диску, рад. R, вращающемуся равномѣрно около вертикальной оси, идет человѣк, вѣса P, в направленіи одного из радіусов, выходя из центра. На какой угол повернется диск к тому моменту, когда человѣк дойдет до края его, если движеніе человѣка относительно диска равномѣрное, со скоростью a; первоначальная угловая скорость диска ω_0, а вѣс диска P_1.



Рѣш. Так как внѣшнія вращающія силы на систему не дѣйствуют, то должно быть $\Sigma mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$. Так как относительная скорость человѣка направлена по рад. OA, то угловыя перемѣщенія φ человѣка и всей платформы одинаковы, а потому одинакова у них угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt}$.

Таким образ. получим: $\frac{d\varphi}{dt}\Sigma mr^2 = C$, $\frac{d\varphi}{dt} J = C$; здѣсь $J = J_0 + J_1$, гдѣ J_0 есть момент инерціи диска, т. е. $J_0 = \frac{P_1}{g}\frac{R^2}{2}$, и J_1 — мом. инерціи человѣка. Если человѣк в данный момент t, от выхода его из центра O, находится в точкѣ B, причем, $OB = x$, то $J_1 = \frac{P}{g}x^2$. Слѣдов., $J = \frac{P_1}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{P}{g}x^2$ и $\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{P_1}{g}\frac{R^2}{2}+\frac{P}{g}x^2\right) = C$. В началѣ, при $x=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0$, то есть: $\omega_0\frac{P_1}{g}\frac{R^2}{2} = C$. Поэтому можем написать $\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{P_1}{g}\cdot\frac{R^2}{2}+\frac{P}{g}x^2\right)=\omega_0\frac{P_1}{g}\frac{R^2}{2}$; $\frac{d\varphi}{dt}(P_1R^2+2Px^2) = \omega_0 P_1 R^2$. Отсюда находим: $d\varphi = \frac{\omega_0 P_1 R^2 dt}{P_1R^2+2Px^2}$. Из условія задачи слѣдует: $x = at$; $t = \frac{x}{a}$; $dt = \frac{dx}{a}$. Подставляем в выраж. для φ: $d\varphi = \frac{\omega_0}{a}\cdot\frac{P_1R^2\,dx}{P_1R^2+2Px^2}$; $\varphi = \int_0^R \frac{P_1R^2\,dx}{P_1R^2+2Px^2}$. Находим интеграл $\int_0^R \frac{P_1R^2}{P_1R^2+2Px^2}dx = \int_0^R\frac{dx}{1+\frac{2P}{P_1R^2}x^2} = \sqrt{\frac{P_1R^2}{2P}}\cdot\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2P}{P_1R^2}}\cdot x\right)\right]_0^R = \sqrt{\frac{P_1R^2}{2P}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2P}{P_1}}$. Подставляя найденный интеграл, получим: $\varphi = \omega_0\cdot\frac{R}{a}\cdot\sqrt{\frac{P_1}{2P}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2P}{P_1}}$. Это и есть угол поворота диска.

№4. Однородный брусок, длиною 2l и вѣса P, расположен симметрично на $2^х$ опорах A и B. Выбрать разстояніе 2x между опорами так, чтобы по удалении опоры B начальное давление на опору A осталось без изменения. Отв. $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.



Реш. По удалении опоры B брусок начнет вращаться около точки A и одновременно скользить вдоль него. Но в первый момент скорость вращения и скольжения будет равна нулю, так что брусок сохранит свою горизонтальность. Внешними силами будут вертикальные силы P и реакция N. По горизонтальному направлению ускорения поэтому не будет; по вертикальному же направлению получится угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ от вращения около точки A. На какую нибудь точку D правой части будет действовать ускорение вниз $r\cdot\frac{d\omega}{dt}$, где $r = AD$; на точку же D_1, левой части бруска, ускорение действует вверх и будет: $r_1\cdot\frac{d\omega}{dt}$, где $r_1 = AD_1$. Приложив силы инерции, действующие на точки бруска, мы, по принципу Д'Аламбера, должны получить равновесие. На правой части силы инерции направлены вверх и сумма их будет: $Q = \Sigma mr\frac{d\omega}{dt}$, где $m = \gamma dr$ (γ — есть масса единицы длины бруска). $Q = \Sigma\gamma\frac{d\omega}{dt}r\,dr = \gamma\frac{d\omega}{dt}\int_0^{l+x} r\,dr = \gamma\frac{d\omega}{dt}\frac{(l+x)^2}{2}$. На левой части силы инерции направлены вниз и сумма их будет: $Q_1 = \Sigma\gamma\frac{d\omega}{dt}r_1\,dr_1 = \gamma\frac{d\omega}{dt}\int_0^{l-x} r_1\,dr_1 = \gamma\frac{d\omega}{dt}\frac{(l-x)^2}{2}$. При равновесии должно быть $Q + N = P + Q_1$; $Q - Q_1 = P - N$; то есть

$\gamma\frac{d\omega}{dt}\frac{(l+x)^2}{2} - \gamma\frac{d\omega}{dt}\frac{(l-x)^2}{2} = P - N$; $\gamma\frac{d\omega}{dt}2lx = P - N$; но $\gamma\cdot 2l = \frac{P}{g}$, след.,
$\frac{P}{g}x\frac{d\omega}{dt} = P - N$ (I). Угловое ускорение, как известно, равно моменту внешних сил, деленному на момент инерции: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Px}{J}$, где J есть момент инерции относительно точки A. Вычислим J; $J = J_0 + \frac{P}{g}x^2$, где J_0 — мом. инерции относительно центра тя-

оси бруска; слъд., $J = \frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2 + \frac{P}{g}x^2$, а $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Px}{J} = \frac{Px}{\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2 + \frac{P}{g}x^2} = \frac{3gx}{l^2+3x^2}$. Подставив в рав. (I), получим:
$\frac{P}{g}x \cdot \frac{3gx}{l^2+3x^2} = P - N$; $\frac{3x^2P}{l^2+3x^2} = P - N$ (II). Когда брусок лежал на обѣих опорах, сопротивление каждой опоры было $\frac{P}{2}$. Условие задачи требует, чтобы $N = \frac{P}{2}$. Подставляем поэтому в рав. (II) $N = \frac{P}{2}$ и мы получим: $\frac{3x^2P}{l^2+3x^2} = P - P/2 = \frac{P}{2}$;
$\frac{3x^2}{l^2+3x^2} = \frac{1}{2}$; $6x^2 = l^2 + 3x^2$; $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Упражнение $\underline{X}$.

№ 1. Игла длины $\underline{l}$, вращающаяся в вертикальной плоскости около одного из своих концов, приводится в горизонтальное положение, затѣм ей сразу сообщена угловая скорость $\underline{\omega}$. Одновременно с началом движенія иглы, паук масса котораго = массѣ иглы, начинает двигаться от точки привѣса по такому закону, что игла вращается равномѣрно. Опредѣлить, когда паук доползет до конца иглы

<u>Отв.</u> $T = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arc\,Sn}\,\frac{\omega^2 l}{g}(2 - lg\,3)$

OA = l. <u>Рѣш.</u> Пусть масса иглы $\underline{M}$, масса паука также $\underline{M}$, а вѣс их $p = Mg$.

Пусть в момент времени $\underline{t}$ игла отклонится на $\angle\varphi = \omega t$, а паук прошел путь $OB = S$, зависимость котораго от времени неизвѣстна: $S = f(t)$, гдѣ $f(t)$ – нѣкоторая функція от $\underline{t}$. Из Анал. мех. мы имѣем для вращательнаго движенія тѣла:
$\Sigma(xY - yX) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ (I). $\Sigma(xY - yX)$ есть сумма

моментов вращающих сил. Для нашей задачи имеем: $\Sigma(xY-yX)= Mg\cdot OC\cdot Cs\varphi + Mg\cdot OB\cdot Cs\varphi = Mg\,Cs\varphi\left(\frac{l}{2}+s\right)$. Далѣе имеем: $\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\Sigma mr^2 = \omega(J_0+J)$, гдѣ J_0 — есть мом. инерціи иглы, т.е. $J_0=\frac{Ml^2}{3}$, а J есть мом. инерціи паука, т.е. $J=Ms^2$; таким образом, $\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[\omega(J_0+J)\right] = \omega\frac{d}{dt}(J_0+J) = \omega\frac{d}{dt}\left(M\frac{l^2}{3}+Ms^2\right) = \omega \frac{d}{dt}(Ms^2) = 2\omega M s\frac{ds}{dt}$. Слѣдов., рав. (I) приметъ вид: $Mg\left(\frac l2+s\right)Cs\varphi = 2M\omega s\frac{ds}{dt}$, или: $g\left(\frac l2 + s\right)Cs\omega t = 2\omega s \frac{ds}{dt}$, или же: $g(l+2s)Cs\omega t = 4\omega s\cdot\frac{ds}{dt}$. Раздѣляя перемѣнныя, получим: $g\cdot\frac{Cs\omega t}{4\omega}dt = \frac{s}{2s+l}ds$. Интегрируя, получим: $\int_0^T \frac{g}{4\omega}Cs\omega t\cdot dt = \int_0^l \frac{s}{2s+l}ds$ (II).

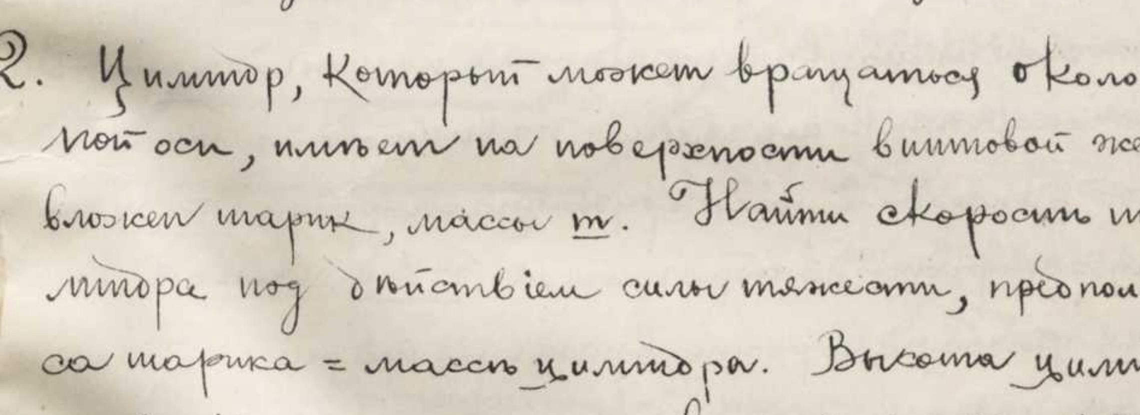
Имеем: $\int_0^T\frac{g}{4\omega}Cs\omega t\,dt = \frac{g}{4\omega^2}\int_0^T Cs\omega t\cdot d(\omega t) = \frac{g}{4\omega^2}\left[Sn\omega t\right]_0^T = \frac{g}{4\omega^2}Sn\omega T$; $\int_0^l\frac{s}{2s+l}ds = \frac12\int_0^l\frac{2s+l-l}{2s+l}ds = \frac12\left[\int_0^l ds - \int_0^l\frac{l}{2s+l}ds\right] = \frac12\left[l - \frac l2\int_0^l\frac{d(2s+l)}{2s+l}\right] = \frac l2 - \frac l4\left[lg(2s+l)\right]_0^l = \frac l2 - \frac l4(lg3l - lgl) = \frac l2 - \frac l4 lg3 = \frac l4(2-lg3)$. Подставляя в рав. (II), получим: $\frac{g}{4\omega^2}Sn\omega T = \frac l4(2-lg3)$. Откуда $Sn\omega T = \frac{4\omega^2}{g}\cdot\frac l4(2-lg3)$; $\omega T = \arcsin\frac{\omega^2 l}{g}(2-lg3)$ и $T=\frac1\omega \arcsin\frac{\omega^2 l}{g}(2-lg3)$.

2. Цилиндр, который может вращаться около вертикальной оси, имѣет на поверхности винтовой желоб. В него вложен шарик, массы m. Найти скорость шарика и цилиндра под дѣйствіем силы тяжести, предполагая, что масса шарика = массѣ цилиндра. Высота цилиндра = радіусу основанія, а угол наклона винтовой линіи = 45°.

Отв. Скорости опредѣляются из ур.: 1) $\omega(J+ma^2) - amv\,Cs\varphi = 0$

и 2) $J\omega^2 + m\left[(a\omega - vCs\varphi)^2 + (v\,Sn\varphi)^2\right] = 2mga$.

Рѣш. Рѣшим задачу в общем случаѣ, когда угол наклона винтовой линіи будет φ; если развернем боковую поверхность цилиндра, то винтовая линія,



Аналит. мех. II ч.

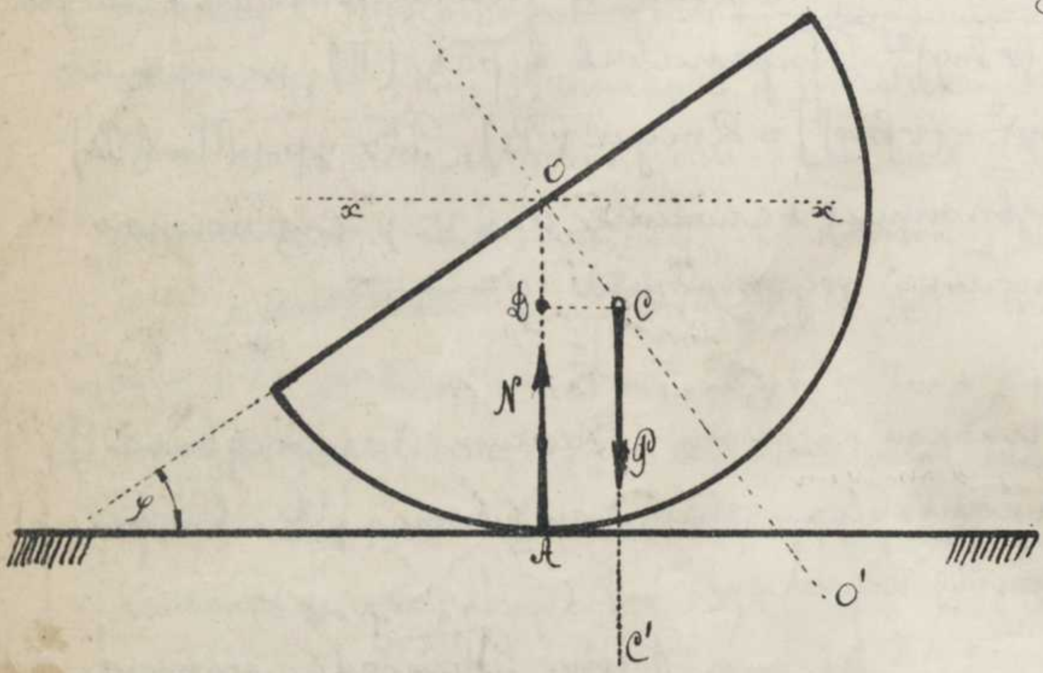
гипотенузой прямого угла тр-ка, гдѣ катет BC представляет окружность основанія цилиндра, а катет BD — образующую. В началѣ цилиндр и шарик находились в покоѣ; когда шарик стал падать по винтовой линіи, то цилиндр начал вращаться с нѣкоторой угловой скоростью ω. Внѣшнія силы сводятся к вѣсу цилиндра и шарика, который будет: $p = mg$. Эти силы параллельны оси вращенія ZZ; слѣд., момент их относительно этой оси $= 0$, а потому, как извѣстно из Анал. мех., должно быть: $\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = Const.$, или $\sum mr^2\frac{dy}{dt} = C$, или же: $\omega.\sum mr^2 + \omega_1\sum mr_1^2 = C$, т.е. $J\omega + J_1\omega_1 = C$, гдѣ J есть мом. инерціи цилиндра, а J_1 — мом. инерціи шарика, который, очевидно, будет: $J_1 = ma^2$; ω — угловая скорость цилиндра, а ω_1 — абсолютная угловая скорость вращенія шарика. Так. образом, получаем: $J\omega + ma^2\omega_1 = C$. Но в началѣ движенія ω и ω_1 равнялись нулю, слѣд., $C = 0$, а потому получаем: $J\omega + ma^2\omega_1 = 0$ (I). Скорость относительнаго движенія шарика по цилиндру назовем через v; эта скорость направлена по винтовой линіи DC вниз. Ее мы разложим на окружную скорость $v.Cs\varphi$ и вертикальную скорость по образующей $v.Sn\varphi$. Слѣдов., относительная угловая скорость вращенія шарика будет $\frac{v\,Cs\varphi}{a}$ и, как легко видѣть, будет направлена в сторону, противоположную вращенію цилиндра. Абсолютная же угл. скор. сложится из переносной ω и относительной $\frac{v.Cs\varphi}{a}$, т.е. $\omega_1 = \omega - \frac{v}{a}Cs\varphi$. Подставляя в ур. (I), получим: $J\omega + ma^2\left(\omega - \frac{v}{a}Cs\varphi\right) = 0$; $\omega(J + ma^2) - mav\,Cs\varphi = 0$ (A). Получим, так. образом, одно ур. с двумя неизвѣстными ω и v. Другое ур. мы составим, пользуясь интегралом живых сил. Когда шарик опустится вниз на величину a, то работа силы тяжести будет $mg.a$. Живая же сила системы будет: $J\frac{\omega^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}$, гдѣ v_1 есть абсолютная линейная скорость движенія шарика. По теоремѣ о живой силѣ имѣем: $J\frac{\omega^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} =$

$= mga$; $I\omega^2 + mv_1^2 = 2mga$ (II). Определим v_1^2. Мы видели, что абсолютн. угл. скор. вращения шарика есть $\omega_1 = \omega - \frac{v}{a}\cos\varphi$, слѣд., линейная скорость по окружности будет: $\omega_1 a = \omega . a - v\cos\varphi$; скорость же по образующей, как мы видели раньше, есть $v\sin\varphi$; слѣдов., абсолютная скорость v_1 опредѣлится из равенства: $v_1^2 = (a\omega - v\cos\varphi)^2 + (v\sin\varphi)^2$. Подставив в рав. (II), получим: $I\omega^2 + m\left[(a\omega - v\cos\varphi)^2 + (v\sin\varphi)^2\right] = 2mga$ (B). Из ур. (A) и (B) опредѣлятся неизвѣстныя величины ω и v; для нашего случая придется только подставить $\varphi = 45°$.

№ 3. На абсолютно гладкой плоскости лежит палочка, вѣса P. На палочку подѣйствовала пара момента M. Опредѣлить закон движения палочки.

Рѣш. Палочка может двигаться только в горизонтальной плоскости. В началѣ она находилась в покоѣ. Проекция же пары на всякую ось равна нулю, т.е. $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, а потому центр тяжести C палочки должен оставаться в покоѣ; слѣдов., палочка будет вращаться около оси ZZ, проходящей через центр тяжести. Угловое ускорение, как извѣстно, выразится формулой: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}$, гдѣ M — момент пары, а I — мом. инерции палочки относительно центра тяжести. Из этого ур. находим: $\omega = \int \frac{M}{I} dt = \frac{M}{I} dt + C_1$. При $t = 0$ мы имѣем и $\omega = 0$, слѣд., $C_1 = 0$, а потому $\omega = \frac{M}{I} t$. Но $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, слѣд., $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{I} t$; $\varphi = \int \frac{M}{I} t\, dt = \frac{M}{I} \cdot \frac{t^2}{2} + C_2$; при $t = 0$ и $\varphi = 0$, слѣд., $C_2 = 0$, а потому $\varphi = \frac{M}{2I} t^2$. Это и будет закон движения палочки, которое, как видно из полученной формулы, будет равномѣрно-ускоренное.

№4. На совершенно гладкую горизонтальную плоскость поставили тяжелый однородный полуцилиндр в данном, на чертежѣ, положенiи. Каково в начальный момент движенiя давленiе полуцилиндра на плоскость.

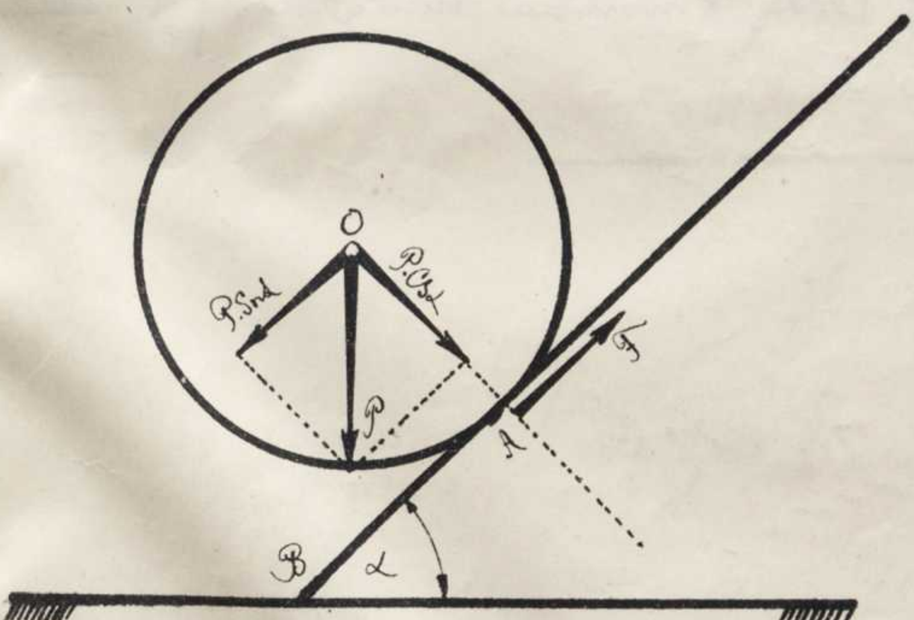


Рѣш. На полуцилиндр дѣйствует сила тяжести P, приложенная в центрѣ тяжести C, и реакцiя плоскости N, которая также вертикальна. Так как внѣшнiя силы сводятся к 2м вертикальным силам P и N, то центр тяжести C должен двигаться, как материальная точка, на которую дѣйствует равнодѣйствующая этих сил, перенесенных в центр тяжести, т.е. сила $(P-N)$. Так. образом, точка C будет двигаться по прямой CC' с ускоренiем j, при чем, $P-N=\frac{P}{g}j$ (I). С другой стороны точка O движется по горизонтальной прямой xx (т.к. эта точка всегда удалена от плоскости на величину радiуса). Отсюда видно, что в точкѣ D, пересѣченiя перпендикуляров к прямым xx и CC', лежит полюс мгновенного вращенiя полуцилиндра. Угловая скорость $\frac{d\omega}{dt}$ этого вращенiя опредѣлится из равенства: $\frac{d\omega}{dt}=\frac{P.CD}{I_D}$, гдѣ $P.CD$ есть момент внѣшних сил относительно D, а I_D есть момент инерцiи тѣла относительно точки D. Но $CD=OC.\sin\varphi$, откуд. $\frac{d\omega}{dt}=\frac{P.OC.\sin\varphi}{I_D}$. Линейное ускоренiе j точки C опредѣлится из равенства: $j=\frac{d\omega}{dt}\cdot CD$; $j=\frac{P.OC.\sin\varphi}{I_D}\cdot OC.\sin\varphi=\frac{P.OC^2.\sin^2\varphi}{I_D}$. Подстав-

лея в ур. (I), получим: $P - N = \frac{P}{g}\cdot\frac{P.OC^2.\sin^2\varphi}{J_D}$ (II). Далье имѣем: $J_D = J_0 + \frac{P}{g}.CD^2$, гдѣ J_0 — есть мом. инерціи относительно центра тяжести C; мы можем написать его в таком видѣ: $J_0 = \frac{P}{g}K^2$, гдѣ K есть радіус инерціи относительно C; слѣдов., $J_D = \frac{P}{g}K^2 + \frac{P}{g}CD^2 = \frac{P}{g}(K^2 + OC^2.\sin^2\varphi)$. Подставив в рав. (II), получим: $P - N = \frac{P.OC^2\sin^2\varphi}{K^2+OC^2.\sin^2\varphi}$; откуда, $N = P - \frac{P.OC^2.\sin^2\varphi}{K^2+OC^2.\sin^2\varphi} =$
$= \frac{P.K^2}{K^2+OC^2.\sin^2\varphi} = \frac{P}{1+\frac{OC^2}{K^2}\sin^2\varphi}$. Обозначая $OC = d$, получим:

$$N = \frac{P}{1+\frac{d^2}{K^2}\sin^2\varphi}.$$

№5. Однородный круглый цилиндр начинает двигаться по шероховатой наклонной плоскости под дѣйствіем сил тяжести и во все время его движенія ось его остается горизонтальной. Какова в любой момент сила тренія и каков должен быть коэффиціент тренія 1го рода, чтобы отсутствовало скольженіе.



Рѣш. Вѣс цилиндра назовем через P. Разлагая его параллельно наклонной плоскости и нормально, найдем, что нормальная слагающая $P.\cos\alpha$ уничтожится давленіем плоскости, движущей силой будет $P.\sin\alpha$. Если бы плоскость была идеально гладкой, то цилиндр двигался бы поступательно. Вслѣдствіе тренія он будет катиться. Сила тренія, F, будет приложена в A, параллельно плоскости. Мы можем так. образом раз=

сматривать цилиндр под дѣйствiем сил $P.\sin\alpha$ и F. Равнодѣйствующая этих сил, перенесенных в центр тяжести, будет $P.\sin\alpha - F$. Центр тяжести O, слѣд., будет двигаться с ускоренiем j, которое опредѣлится из равенства: $P\sin\alpha - F = \frac{P}{g} j$ (I). Цилиндр катится и мгновенным полюсом вращенiя служит точка A. Угловое ускоренiе опредѣлится так: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{P\sin\alpha . r}{J_A}$, гдѣ r — радiус основанiя цилиндра, а J_A — момент инерцiи относит. A; слѣд., $J_A = J_0 + \frac{P}{g} r^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2$. Так. образом, получаем: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{P\sin\alpha\, r}{\frac{3}{2}\frac{P}{g} r^2} = \frac{2g\sin\alpha}{3r}$. Линейное ускор. точки O опредѣлится так: $j = r\frac{d\omega}{dt} = r . \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{r} = \frac{2}{3} g\sin\alpha$. Подставив в рав. (I), получим: $P\sin\alpha - F = \frac{P}{g}\frac{2}{3} g\sin\alpha$, откуда $F = \frac{1}{3} P\sin\alpha$. Такова будет сила тренiя. Тренiе скольженiя выражается, как извѣстно, так: $F_1 = P\cos\alpha . f$. Чтобы отсутствовало скольженiе необходимо, чтобы $F_1 > F$, т.е. $P.\cos\alpha . f > \frac{1}{3} P\sin\alpha$; отсюда найдем: $f > \frac{tg\alpha}{3}$.