

УДК 515.16+512.734

## Алгебры Янга–Бакстера, алгебра конволюций и многообразия Грассмана

В. Г. Горбунов, К. Корфф, К. Строппель

Статья посвящена новому, активно развивающемуся направлению современной математики – изучению связи квантовых интегрируемых моделей и исчисления Шуберта для колчаных многообразий. В статье предлагается геометрическая конструкция решений уравнения Янга–Бакстера и алгебр, связанных с ними, которые называются алгебрами Янга–Бакстера. Эти алгебры играют центральную роль в квантовых интегрируемых системах и точно решаемых (интегрируемых) решеточных моделях статистической физики. Мы покажем на примере классической геометрии многообразий Грассмана, как появляется указанная выше связь. Конкретно, мы отождествляем алгебру конволюций, возникающую в эквивариантном исчислении Шуберта, с алгеброй Янга–Бакстера вырождения асимметричной шестивершинной модели, так называемой пятивершинной модели. Мы покажем также, как, используя наши методы, можно построить действие факторов универсальной обертывающей алгебры для алгебры токов  $\mathfrak{sl}_2[t]$  (так называемые алгебры типа Шура) на тензорных произведениях ее представлений вычисления  $\mathbb{C}^2[t]$ . Наконец, мы связываем нашу конструкцию с когомологической алгеброй Холла для колчана  $A_1$ .

Библиография: 125 названий.

**Ключевые слова:** квантовые интегрируемые системы, колчаные многообразия, квантовые когомологии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9959>

### СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| 1. Введение.....                                    | 4  |
| 2. Язык диаграмм в теории интегрируемых систем..... | 8  |
| 2.1. Матрицы Лакса и матрицы монодромии.....        | 8  |
| 2.2. Вычисление матричных коэффициентов.....        | 12 |
| 2.3. Квантовое уравнение Янга–Бакстера.....         | 12 |
| 2.4. Шести- и пятивершинные модели.....             | 14 |

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФ (грант № 20-61-46005) и программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (проект “5-100”).

|   |    |
|---|----|
| 3. Алгебры Янга–Бакстера и векторы Бете .....   | 15 |
| 3.1. Алгебры Янга–Бакстера .....  | 15 |
| 3.2. Действие симметрической группы и алгебры $\mathbf{H}$ .....  | 18 |
| 3.3. Векторы Бете .....   | 19 |
| 4. $R$ -матрица, связанная с геометрией многообразия Грассмана .....  | 23 |
| 4.1. Базисы .....   | 24 |
| 4.2. Твистованные классы Шуберта .....  | 24 |
| 4.3. Эквивариантные твистованные классы Шуберта .....   | 25 |
| 4.4. Переход через стенку камеры Вейля .....  | 28 |
| 4.5. Геометрический базис Бете .....  | 29 |
| 5. Геометрические алгебры Янга–Бакстера и конволюции в когомологиях .....                                     | 30 |
| 5.1. Комбинаторика неподвижных точек действия тора в частичных<br>многообразиях флагов .....                  | 30 |
| 5.2. Геометрические алгебры Янга–Бакстера .....   | 31 |
| 5.3. Важные соотношения .....   | 33 |
| 5.4. Сравнение геометрического и алгебраического действий .....   | 36 |
| 5.5. Явные формулы .....  | 37 |
| 6. Эквивариантные квантовые когомологии .....   | 39 |
| 6.1. Оператор $D$ .....   | 39 |
| 6.2. Квантовая деформация .....   | 40 |
| 6.3. Эквивариантные квантовые когомологии .....   | 41 |
| 7. Связь с алгеброй токов $\mathfrak{gl}_2[t]$ .....  | 42 |
| 7.1. $\mathbb{V}_N$ как представление $\mathbf{H}$ .....  | 42 |
| 7.2. $\mathbb{V}_N$ как представление $\mathfrak{gl}_2[t]$ .....  | 44 |
| 7.3. Локализация алгебры Шура и алгебры Янга–Бакстера .....   | 46 |
| 8. Связь с когомологическими алгебрами Холла .....  | 47 |
| 8.1. Пример: $\text{CoHa}(A_1)$ .....   | 47 |
| 8.2. Действие на $H_T^*$ .....  | 48 |
| 8.3. Когомологическая алгебра Холла и геометрическое действие алгебр Янга–Бакстера .....                      | 49 |
| 9. Заключительные замечания и направления дальнейших исследований .....                                       | 50 |
| 9.1. Квантовые аффинные алгебры .....   | 50 |
| 9.2. Операторы Демазура, колчаные алгебры Гекке, колчаные алгебры Шура и когомологические алгебры Холла ..... | 51 |
| 9.3. Собственные функции $q$ -разностных операторов .....   | 51 |
| 9.4. Теоретико-множественные решения уравнений Янга–Бакстера .....  | 52 |
| Список литературы .....   | 52 |