

УДК 517.5

## Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ , задача Римана–Гильберта и некоторые приложения

С. И. Безродных

Рассматривается проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы  $F_D^{(N)}$  – обобщенной гипергеометрической функции  $N$  комплексных переменных. При произвольном  $N$  указан полный набор формул аналитического продолжения этой функции за границу единичного поликруга, в котором она первоначально определена в виде  $N$ -кратного гипергеометрического ряда. Такие формулы представляют функцию  $F_D^{(N)}$  в подходящих подобластях  $\mathbb{C}^N$  через другие обобщенные гипергеометрические ряды, являющиеся решениями той же системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет  $F_D^{(N)}$ . Эти гипергеометрические ряды являются  $N$ -мерным аналогом решений Куммера, известных в теории классического гипергеометрического уравнения Гаусса. В работе также обсуждается применение этой функции к теории задачи Римана–Гильберта и даются приложения к проблеме параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и задачам физики плазмы.

Библиография: 163 названия.

**Ключевые слова:** гипергеометрические функции многих переменных, системы уравнений с частными производными, аналитическое продолжение, задача Римана–Гильберта, интеграл Кристоффеля–Шварца, проблема крудинга, эффект магнитного пересоединения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9841>

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
1.1. Функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ .....	4
1.2. Гипергеометрические функции многих переменных и системы уравнений .....	8
1.3. Формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы ..	13
1.4. Проблема параметров интеграла Кристоффеля Шварца и аналитическое продолжение функции $F_D^{(N)}$ .....	18
1.5. Задача Римана Гильберта и формулы типа Якоби .....	20

Работа выполнена при поддержке программы РУДН “5-100” и РФФИ (гранты № 16-01-00781, 16-07-01195).

2. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы .....	22
2.1. Представление с помощью контурных интегралов Меллина–Барпса .....	22
2.2. Аналитическое продолжение в окрестность $\mathbf{z}_q^{(\infty,0)}$ .....	27
2.3. Аналитическое продолжение в окрестность $\mathbf{z}_p^{(1,0)}$ .....	36
2.4. Аналитическое продолжение в окрестность $\mathbf{z}_{p,q}^{(1,\infty,0)}$ .....	40
2.5. Логарифмический случай .....	46
3. Формулы типа Якоби для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и их приложение к задаче Римана–Гильберта .....	50
3.1. Тождество Якоби для функции Гаусса $F(a, b; c; z)$ и его обобщение для $F_D^{(N)}$ .....	50
3.2. Постановка задачи Римана–Гильберта в $\mathbb{H}^+$ с кусочно постоянными данными .....	55
3.3. Представление решения задачи Римана–Гильберта в виде интеграла Кристоффеля–Шварца .....	58
3.4. Применение формул типа Якоби для вывода нового представления решения задачи Римана–Гильберта .....	62
4. Приложение к физике плазмы .....	65
4.1. Модель магнитного пересоединения и постановка соответствующей задачи Римана–Гильберта .....	65
4.2. Задача в четверти исходной области и построение конформного отображения .....	67
4.3. Решение задачи Римана–Гильберта в полуплоскости .....	70
4.4. Область годографа магнитного поля и численные результаты для решения исходной задачи в области пересоединения .....	72
5. Приложение к проблеме параметров интеграла Кристоффеля Шварца .....	74
5.1. Представление системы нелинейных уравнений для параметров через функцию Лауричеллы .....	74
5.2. Пример построения конформного отображения в ситуации кродинга .....	78
6. Заключение .....	82
Список литературы .....	85

## 1. Введение

**1.1. Функция Лауричеллы  $F_D^{(N)}$ .** Гипергеометрические функции двух и большего числа переменных возникают во многих областях современной математики и дают возможность конструктивного решения ряда весьма актуальных задач, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Основы теории таких функций были заложены в работах [1]–[6], относящихся к концу XIX в., а ее развитию посвящены исследования известных авторов (см., например, оригинальные статьи и монографии [7]–[29]). Необходимо отметить существенный прогресс в общей теории гипергеометрических функций многих переменных; при этом большое внимание традиционно уделяется отдельным представителям этого класса, имеющим самостоятельное значение.