Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

А. С. Шабловский

Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа»

В двух частях

Часть 2
Гидродинамика

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2012

УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253
Ш13

Рецензенты: *А. Б. Ивашкин*, *А. В. Лепешкин*

Шабловский А. С.

Ш13 Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа» : учеб. пособие: В 2 ч. — Ч. 2: Гидродинамика. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 65, [3] с. : ил.

Изложены основные теоретические положения, описывающие движение жидких и газообразных сред. Приведены конкретные решения типовых задач раздела «Гидродинамика». Рассмотрены режимы движения жидкости, истечение через отверстия и насадки. Приведена методика расчета местных сопротивлений, простых и сложных трубопроводов.

Для студентов машиностроительных факультетов МГТУ им. Н. Э. Баумана, изучающих дисциплину «Механика жидкости и газа».

Содержание учебного пособия соответствует программам дисциплин, преподаваемых в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 141100 «Энергетическое машиностроение» и изучающих дисциплину «Механика жидкости и газа» (бакалавриат и специалитет).

Цель пособия — помочь студентам выработать навыки применения теоретических сведений к решению конкретных задач и, следовательно, освоить практику гидравлических расчетов.

Каждый раздел пособия содержит краткие теоретические сведения, методические указания и примеры решения конкретных типовых задач с количественными оценками и единицами измерения различных параметров. В целом приведены подробные решения 19 разнообразных по тематике и степени сложности задач, с достаточной полнотой охватывающих основные разделы технической гидромеханики.

Изучение изложенного в пособии материала с последующим анализом степени влияния различных параметров на полученные результаты в рассматриваемых конструкциях и системах поможет студентам решать более сложные проблемы, возникающие при самостоятельной работе.

Предлагаемый материал также может быть полезен студентам других специальностей машиностроительных факультетов МГТУ им. Н. Э. Баумана для решения частных задач при выполнении домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа».

Единицы измерения физических величин

Международная система (СИ)

Величина		Единица измерения	
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение
Длина	L	метр	м
Масса	M	килограмм	кг
Время	T	секунда	с
Температура	θ	кельвин	К
Площадь	L^2	квадратный метр	м^2
Объем	L^3	кубический метр	м^3
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с^2
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с^2
Частота	T^{-1}	герц	Гц
Частота вращения	T^{-1}	оборот в секунду	об/с
Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м^3/с
Плотность	ML^{-3}	килограмм на кубический метр	кг/м^3
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	м^3/кг
Количество движения	MLT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг · м/с
Момент количества движения	ML^2T^{-1}	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг · м^2/с
Сила, вес	MLT^{-2}	ньютон	Н

Окончание таблицы

Величина		Единица измерения	
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение
Момент силы	ML^2T^{-2}	ньютон-метр	Н · м
Импульс силы	MLT^{-1}	ньютон-секунда	Н · с
Давление	$ML^{-1}T^{-2}$	паскаль	Па
Напор, потеря напора	L	метр	м
Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с
Работа, энергия	ML^2T^{-2}	джоуль	Дж
Мощность	ML^2T^{-3}	ватт	Вт
Модуль упругости	$ML^{-1}T^{-2}$	паскаль	Па
Динамическая вязкость	$ML^{-1}T^{-1}$	паскаль-секунда	Па · с
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м^2/с
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м
Удельная газовая постоянная	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг · K)
Удельная теплоемкость	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг · K)

1. Гидродинамика. Основные понятия и определения

Основным объектом изучения гидродинамики является поток жидкости, т. е. движение массы жидкости между ограничивающими твердыми поверхностями. Это может быть течение в открытых руслах (*безнапорное течение*) или течение с потоками без свободной поверхности и с давлением, отличным от атмосферного (внутри трубопроводов, насадков, элементов гидромашин и пр. — *напорное течение*). Чаще всего исследуют внутренние течения жидкостей и решают так называемую внутреннюю задачу в отличие от внешней задачи, связанной с внешним обтеканием тел сплошной средой, которое имеет место при движении твердого тела в жидкости или газе (воздухе). Последняя задача рассматривается в аэродинамике и имеет свои специфические особенности.

Исследование движения жидких и газообразных сред является более трудной и сложной задачей, чем исследование движения абсолютно твердого тела. Именно поэтому при таком исследовании наряду с применением известных законов механики (в частности, метода физического поля — метода Эйлера) часто практикуют постановку гидравлического эксперимента с целью получения экспериментальных данных и согласования их с теоретическими выводами для дальнейшего практического использования.

Для теоретических исследований в гидродинамике используют несколько моделей жидкости. Ниже рассматриваются две из них:

а) несжимаемая невязкая жидкость (идеальная), для которой плотность $\rho = \text{const}$, вязкость $\mu = 0$, касательное напряжение $\tau = 0$;

б) несжимаемая вязкая жидкость (нормальная, ньютоновская) с параметрами $\rho = \text{const}$, $\mu \neq 0$, $\tau \neq 0$.

Примечание. При определенных условиях могут быть использованы модели сжимаемых вязких и невязких жидкостей (газов).

Течение жидкости может быть установившимся (стационарным) или неустановившимся (нестационарным).

Установившееся течение — это течение, неизменное по времени, при котором давление и скорость в точках рассматриваемого пространства являются функциями лишь координат, но не зависят от времени:

$$p = f_1(x,\, y,\, z); \quad \bar{v} = f_2(x,\, y,\, z); \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0.$$

Неустановившееся течение — это течение, все характеристики которого (или некоторые из них) изменяются во времени. В общем случае неустановившегося течения давление и скорость зависят как от пространственного положения точек, так и от времени:

$$p = F_1(x,\, y,\, z,\, t); \quad \bar{v} = F_2(x,\, y,\, z,\, t).$$

Расход — количество жидкости, протекающее через нормальное («живое») сечение потока в единицу времени. Это количество можно измерять в единицах объема Q, в весовых G или массовых M единицах. Для потока конечных размеров, когда скорость в общем случае имеет различное значение в разных точках нормального сечения площадью F,

$$Q = \int_F v\, dF.$$

Введя понятие $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость по сечению, имеем: $v_{\text{ср}} = Q/F$, тогда $Q = v_{\text{ср}}F$ — объемный расход, м^3/с. Весовой расход, Н/с, и массовый расход, кг/с, могут быть определены по выражениям

$$G = \rho g Q, \quad M = \rho Q.$$

При движении несжимаемой жидкости через любое поперечное сечение потока в единицу времени проходит одно и то же количество жидкости, следовательно, из закона сохранения массы

$$Q = v_{\text{ср}1}F_1 = v_{\text{ср}2}F_2 = \text{const}$$

(вдоль всего потока).

Это одно из основных уравнений гидродинамики — *уравнение постоянства расхода*. Важно подчеркнуть, что указанное уравнение является частным случаем общего закона сохранения вещества, а также условием сплошности (неразрывности) течения.

Вторым важным уравнением, определяющим связь между давлением и скоростью в движущемся потоке жидкости, является *уравнение Бернулли*. Энергетический смысл *уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости* заключается в постоянстве вдоль потока полной удельной энергии жидкости. В частности, для двух произвольных поперечных сечений в случае установившегося движения идеальной жидкости и равномерного распределения скорости по нормальному сечению можно записать следующее уравнение энергетического баланса:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow H_1 = H_2 = \mathrm{const}$$

(вдоль всего потока), где H_1, H_2 — полная удельная механическая энергия единицы веса перемещаемой жидкости, Дж/Н, или полный напор, м, включающий в себя соответственно геометрический, пьезометрический и скоростной напор.

Для потока реальной вязкой жидкости следует учитывать неравномерность распределения скорости по нормальному сечению потока. В практических расчетах применяют понятие средней скорости $v_{\text{ср}}$. При этом расчетное значение удельной кинетической энергии потока получается несколько меньшим действительного. Последнее обстоятельство отражают введением поправочного коэффициента α (коэффициент кинетической энергии, учитывающий неравномерность распределения скоростей, величина безразмерная):

$$\alpha = \frac{1}{F} \int\limits_F \left(\frac{v}{v_{\text{ср}}}\right)^3 dF.$$

При обычном распределении скоростей коэффициент α всегда больше единицы, а при равномерном распределении скоростей равен единице.

Для ламинарного режима движения жидкости в круглых трубах $\alpha = 2$, для турбулентного $\alpha \cong 1$. В реальных условиях необходимо учитывать также потери напора $\sum h_{\text{п}}$ на участке от первого исследуемого сечения до второго, обусловленные гидравлическими потерями на трение $h_{\text{тр}}$ и потерями на местных гидравлических сопротивлениях $h_м$:

$$\sum h_п = h_{тр} + h_м.$$

С учетом изложенного выше уравнение Бернулли для случая установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости записывают в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_{ср1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_{ср2}^2}{2g} + \Sigma h_п,$$

где z_1 и z_2 — расстояния от выбранной горизонтальной плоскости отсчета до центров соответствующих сечений, причем величина z берется со знаком плюс, если центр сечения находится над плоскостью отсчета, и со знаком минус, если под ней; p_1 и p_2 — давления в тех же точках (либо в абсолютной, либо в избыточной системе) в этих сечениях; $v_{ср1}$ и $v_{ср2}$ — средние значения скоростей в этих же сечениях.

П р и м е ч а н и е. Уравнение Бернулли в таком виде применимо и для движения газообразных сред при соблюдении одного из основных условий. Этим условием является малое значение скорости течения газа по сравнению со скоростью распространения в нем звука.

Задача 1.1. В трубу с поршнем (рис. 1.1) необходимо всосать за время t объем V жидкости, имеющей плотность ρ. При этом нужно определить: а) с какой скоростью $v_п$ нужно перемещать поршень? б) какую внешнюю силу P нужно при этом приложить к поршню? в) какая работа A будет совершена при перемещении поршня?

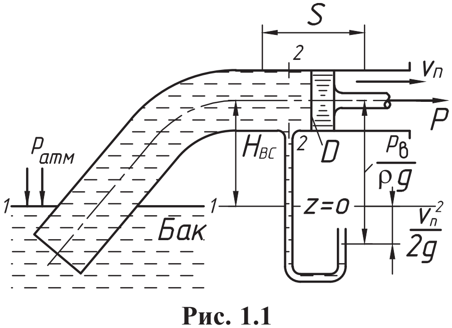


Рис. 1.1

Решение. При решении задачи принимаем следующие допущения: жидкость несжимаема, движение установившееся, скорость потока $v_п = \text{const}$, процесс считается идеальным (гидравлическими потерями напора пренебрегаем), жидкость невязкая, т. е. отсутствует рассеяние механической энергии (она не переходит в теплоту), и наконец, поршень идеальный (он движется в трубе без трения, утечек нет).

Решение задачи предусматривает использование двух законов, которые были приведены выше:

1) закон сохранения массы: $Q = vF = \text{const}$ — уравнение постоянства расхода;

2) закон сохранения энергии: $H = z + \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{v^2}{2g} = \text{const}$ — уравнение Бернулли.

Последнее утверждение кажется противоречивым. Действительно, затрачиваем энергию для перемещения поршня, а полный напор $H = \text{const}$. Почему энергия 1 кг жидкости в баке и энергия 1 кг жидкости, перемещаемой в трубе за поршнем, одинакова? Объяснение этому факту будет дано ниже.

а) Объемный расход, м^3/с, может быть определен по формуле $Q = \dfrac{V}{t}$. Тогда скорость поршня, м/с, равна $v_п = \dfrac{Q}{F} = \dfrac{V}{t}\,\dfrac{4}{\pi D^2}$. При всасывании жидкости в цилиндр сила P в ньютонах, которую нужно приложить к поршню, определяется значением вакуума под поршнем. Исходя из условия равномерного движения поршня, имеем

$$P = (p_{атм} - p_а)F = p_в\,\frac{\pi D^4}{4},$$

где $p_а$ — абслютное давление; $p_в$ — давление вакуума.

Значение вакуума может быть определено из уравнения Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Выбрав сечения *1–1* и *2–2* и приняв за плоскость отсчета плоскость $z = 0$, совпадающую с уровнем жидкости в баке, получим

$$z_1 = 0; \quad p_1 = p_{атм}; \quad v_1 \cong 0,$$

так как $F_1 \ll F_2$ и $v_1 \ll v_2$;

$$z_2 = H_{\text{вс}}; \quad p_2 = p_{\text{а}}; \quad v_2 = v_{\text{п}}.$$

Уравнение Бернулли можно записать как в абсолютной, так и в избыточной системе давлений:

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} = H_{\text{вс}} + \frac{p_{\text{а}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{п}}^2}{2g}; \quad \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{а}}}{\rho g} = \frac{p_{\text{в}}}{\rho g}; \quad \frac{p_{\text{в}}}{\rho g} = H_{\text{вс}} + \frac{v_{\text{п}}^2}{2g}.$$

В последнем выражении $H_{\text{вс}}$ — высота всасывания; $v_{\text{п}}^2/(2g)$ — скоростной напор в сечении *2–2*; $p_{\text{в}}/(\rho g)$ — вакуумметрическая высота.

б), в) С учетом изложенного выше сила P может быть определена как $P = \rho g\left(H_{\text{вс}} + \dfrac{v_{\text{п}}^2}{2g}\right)F$. Работа этой постоянной силы в джоулях равна произведению силы на перемещение S: $A = PS$. Так как $S = V/F$, то $A = p_{\text{в}}FV/F = p_{\text{в}}V$.

Поскольку весовое количество всасываемой жидкости равно $G = \rho gV$, работу можно представить иначе:

$$A = G\left(H_{\text{вс}} + \frac{v_{\text{п}}^2}{2g}\right).$$

Из курса механики известны две формы механической энергии, присущие твердым телам, — энергия положения и кинетическая энергия: $E = z + \dfrac{v^2}{2g}$. В уравнение Бернулли для движущейся жидкости добавлена и третья форма — энергия давления $p/(\rho g)$. Это энергия, которую могут сообщить жидкости внешние силы давления. В рассматриваемой задаче эту работу производит поршень. Именно поэтому энергия 1 кг жидкости в сечениях *1–1* и *2–2* одинакова.

Задача 1.2. В стенку бака с бензином ($\rho = 700$ кг/м^3) вмонтирован короткий трубопровод с вентилем на конце (рис. 1.2). Участок с сужением имеет минимальный диаметр $d = 100$ мм. Заглубление осевой линии трубопровода под свободную поверхность (СП) жидкости $H = 3$ м. Показание манометра M равно 150 кПа. Барометрическое давление $h_{\text{бар}} = 736$ мм рт. ст. Давление насыщенных паров бензина $p_{\text{н.п}} = 30$ кПа. Определить возможный максимальный

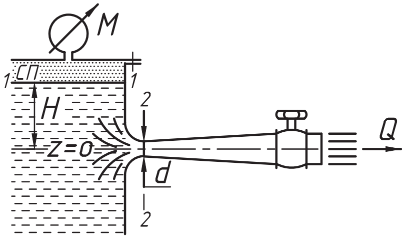


Рис. 1.2

расход бензина $Q_{\max}$ через трубопровод. Гидравлическими потерями напора пренебречь.

Решение. Расход может быть определен по уравнению постоянства расхода $Q = vF$. При известной проходной площади узкого сечения задача по определению расхода сводится к нахождению скорости в нем. Последняя может быть найдена из уравнения Бернулли для двух сечений, показанных на чертеже, с выбранной плоскостью отсчета $z = 0$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

По мере открывания вентиля скорость в суженном сечении увеличивается, а давление уменьшается. В момент, когда абсолютное давление в этом месте достигнет значения $p_{\text{н.п}}$, скорость будет максимальной. Дальнейшее открытие вентиля уже не приведет к увеличению расхода. В абсолютной системе уравнение Бернулли при заданных условиях имеет вид

$$H + \frac{p_{\text{атм}} + p_{\text{и}}}{\rho g} = \frac{p_{\text{н.п}}}{\rho g} + \frac{v_{\max}^2}{2g},$$

где $p_{\text{и}}$ — избыточное давление. Конфузор выравнивает скорости, поэтому считаем, что распределение скоростей по сечению равномерное, $\alpha_2 = 1$. Значение $v_{\max}$ находим по следующему выражению:

$$v_{\max} = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_{\text{атм}} + p_{\text{и}} - p_{\text{н.п}}}{\rho g}\right)},$$

где $p_{\text{атм}} = \rho_{\text{рт}} g h_{\text{бар}} = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}736 = 98\,194$ Па ($\rho_{\text{рт}}$ — плотность ртути), тогда

$$v_{\max} = \sqrt{19{,}6\left(3 + \frac{98\,194 + 150\,000 - 30\,000}{700 \cdot 9{,}81}\right)} = 26{,}1 \text{ м/с}.$$

Следовательно, возможный максимальный расход бензина через трубопровод составит

$$Q_{\max} = v_{\max}\frac{\pi d^2}{4} = 26{,}1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}01 = 0{,}205 \text{ м}^3/\text{с} = 205 \text{ л/с}.$$

2. Режимы движения жидкости. Истечение жидкости через отверстия и насадки

В теории гидродинамического подобия при исследовании установившегося движения однородных жидкостей в подобных потоках одним из важнейших критериев является *число Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu} = \mathrm{idem};$$

Re — величина безразмерная, выражающая отношение сил инерции и сил вязкости жидкости (v — характерная скорость; L — характерный линейный размер; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости). При движении жидкости в трубопроводе круглого сечения характерной скоростью является $v_{\text{ср}}$, за характерный размер принимают диаметр d, число Рейнольдса определяют по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu}.$$

Для потоков в трубах некруглого сечения число Re находят по выражению $\mathrm{Re} = vD/\nu$, где $D = 4F/\chi$ — гидравлический диаметр; F — площадь сечения трубы; χ — периметр сечения (смоченный).

Являясь основным критерием подобия напорных потоков (для которых характерно отсутствие свободной поверхности), число Re определяет режим движения жидкости в трубопроводах. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ ($\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ — критическое значение числа Рейнольдса) существует ламинарный режим течения, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ — турбулентный. При течении жидкости в различных каналах значения $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ находятся в диапазоне $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2000 \ldots 3000$ (так называемая критическая зона). Для труб круглого сечения принимают $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2300$.

Задача 2.1. Для трубки квадратного сечения, сторона которого $a = 10$ мм (рис. 2.1), определить критическую скорость, соответствующую смене режимов движения воды при температуре $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$ ($\nu = 0{,}01$ Ст), воздуха при температуре $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$ и давлении $p = 100$ кПа ($\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ П, $\rho = 1{,}17$ кг/м^3) и турбинного масла при $t = 20\,^\circ$C ($\nu = 1$ Ст), приняв $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2000$.

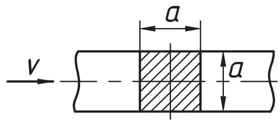


Рис. 2.1

Решение. Гидравлический диаметр в данном случае $D = 4a^2/(4a) = a = 0{,}01$ м; следовательно, искомая критическая скорость может быть определена из формулы

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{кр}} a}{\nu} \Rightarrow v_{\text{кр}} = \frac{\mathrm{Re}_{\text{кр}} \nu}{a}.$$

При движении воды

$$v_{\text{кр}} = \frac{2\,000 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-4}}{0{,}01} = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

При движении воздуха

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1{,}82 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1}{1{,}17} = 1{,}55 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$v_{\text{кр}} = \frac{2\,000 \cdot 1{,}55 \cdot 10^{-5}}{0{,}01} = 3{,}1 \text{ м/с}.$$

При движении турбинного масла

$$v_{\text{кр}} = \frac{2\,000 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-4}}{0{,}01} = 20 \text{ м/с}.$$

2.1. Истечение жидкости через малые отверстия

В случае истечения жидкости через малые отверстия или насадки разной формы из емкостей в атмосферу или в пространство, заполненное жидкостью, основным вопросом является определение скорости истечения и расхода жидкости. При установившемся истечении жидкости из относительно большого резервуара через малое круглое отверстие с острой кромкой (рис. 2.2) средняя скорость в сжатом сечении струи может быть определена из уравнения Бернулли

$$H_0 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Введя понятие располагаемого напора истечения (разность значений гидростатического напора в резервуаре и в центре сжатого

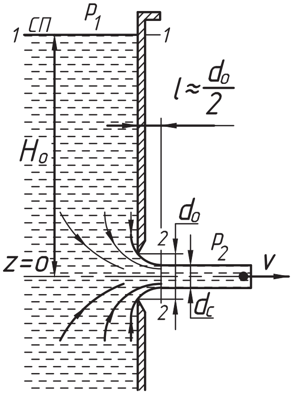


Рис. 2.2

сечения струи) $H = H_0 + \dfrac{p_1 - p_2}{\rho g}$, получим

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}\sqrt{2gH} = \varphi\sqrt{2gH},$$

где φ — безразмерный коэффициент скорости, $\varphi = 1/\sqrt{\alpha + \zeta}$; α — коэффициент кинетической энергии в сжатом сечении струи; ζ — коэффициент сопротивления отверстия, выражающий потерю напора при истечении в долях скоростного напора струи.

Степень сжатия струи, вытекающей через круглое отверстие, характеризуется безразмерным коэффициентом сжатия $\varepsilon = F_\text{c}/F_0 = (d_\text{c}/d_0)^2 < 1$.

Расход через отверстие определяют по формуле $Q = \mu F_0\sqrt{2gH}$ или $Q = \mu F_0\sqrt{2p/\rho}$, где p — перепад давлений, под действием которого происходит истечение.

В выражении для расхода μ — безразмерный коэффициент расхода, связанный с ранее упомянутыми коэффициентами ε и φ зависимостью $\mu = \varepsilon\varphi$.

Значения всех трех коэффициентов зависят от формы кромок, условий подтекания жидкости к отверстию и числа Рейнольдса, определяемого как $\mathrm{Re} = \dfrac{d_0\sqrt{2gH}}{\nu}$. При $\mathrm{Re} \geqslant 10^5$ влияние числа Re на эти коэффициенты практически отсутствует (квадратичная зона истечения), и для теоретических расчетов принимают их значения $\mu = 0{,}60$; $\varepsilon = 0{,}62$; $\varphi = 0{,}97$. При этом неравномерность скоростей в сжатом сечении струи весьма невелика, и поэтому $\alpha \cong 1$. Тогда $\varphi \cong 1/\sqrt{1 + \zeta}$ и значение $\zeta \cong 0{,}06$.

В случае истечения идеальной жидкости гидравлические потери отсутствуют, следовательно, $\zeta = 0$ и $\varphi = 1$. Идеальная скорость истечения равна $v_\text{и} = \sqrt{2gH}$. Тогда коэффициент скорости можно записать как отношение двух скоростей:

$$\varphi = \alpha\frac{v}{\sqrt{2gH}} = \frac{v}{v_\text{и}} < 1.$$

Отношение удельной кинетической энергии струи к располагаемому напору будет энергетической характеристикой самого процесса истечения через отверстие (КПД процесса):

$$\eta = \alpha \frac{v^2}{2gH} = \alpha\varphi^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\zeta}; \quad \eta \cong \frac{1}{1+\zeta} \cong \varphi^2 \text{ (при больших Re)}.$$

Задача 2.2. Определить расход воды через отверстие с острой кромкой диаметром $d = 150$ мм, выполненное в торце вертикальной трубы диаметром $D = 300$ мм, если показание манометра M перед отверстием равно 150 кПа и высота расположения манометра над плоскостью отверстия $h = 1$ м (рис. 2.3). Принять коэффициент сопротивления отверстия $\zeta = 0{,}06$. Коэффициент сжатия струи при выходе из отверстия определить по эмпирической формуле, действительной при сопоставимых порядках D и d:

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}38\left(\frac{F_{\text{отв}}}{F_1}\right)^2.$$

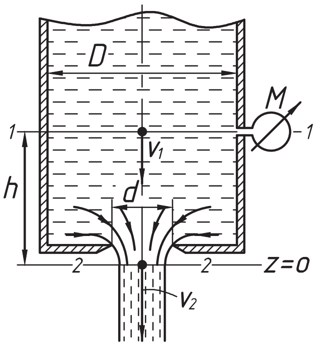


Рис. 2.3

Решение. Для выбранных сечений *1–1* и *2–2* с плоскостью отсчета $z = 0$, совпадающей с *2–2*, запишем уравнение Бернулли в избыточной системе давлений:

$$h + \frac{p_{\text{и}}}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{\rho g} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}.$$

Полагая, что режим движения турбулентный, считаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Уравнение постоянства расхода позволяет выразить среднюю скорость движения в трубопроводе v_1 через среднюю скорость истечения v_2:

$$v_1 F_1 = v_2 F_2; \quad v_1 = v_2 \frac{F_2}{F_1}.$$

Так как $F_2 = \varepsilon F_{\text{отв}} = \varepsilon \dfrac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = v_2 \varepsilon \left(\dfrac{d}{D}\right)^2$;

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}38\left(\frac{150}{300}\right)^4 = 0{,}62 + 0{,}024 = 0{,}643.$$

Скорость истечения

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\left(h + \dfrac{p_и}{\rho g}\right)}{1 + \zeta - \varepsilon^2\left(\dfrac{d}{D}\right)^4}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot \left(1 + \dfrac{1{,}5 \cdot 10^5}{9{,}81 \cdot 10^3}\right)}{1 + 0{,}06 - 0{,}103}} = 18{,}28 \text{ м/с}.$$

Искомый расход воды через отверстие

$$Q = v_2 \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} = 18{,}28 \cdot 0{,}643 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0225 = 0{,}208 \text{ м}^3/\text{с} = 208 \text{ л/с}.$$

2.2. Истечение жидкости через насадки различной формы

При истечении жидкости через насадки различной формы (чаще всего под относительно большим напором) скорость истечения на выходе и расход через насадки определяют по следующим формулам:

$$v = \varphi_н \sqrt{2gH}; \quad Q = \mu_н F_н \sqrt{2gH},$$

где $F_н$ — выходная площадь насадка; $\varphi_н$ и $\mu_н$ — безразмерные коэффициенты скорости и расхода насадка, определяемые опытным путем. Средние значения коэффициентов истечения для основных типов насадков при больших числах Re (квадратичная зона) приведены в справочной литературе.

Для некоторых насадков коэффициенты истечения могут быть приближенно определены при расчете путем суммирования потерь на отдельных участках потока.

Общую потерю напора для внешнего цилиндрического насадка (рис. 2.4) можно представить в виде суммы

$$h_п = \zeta \frac{v^2}{2g} = h_{п(1-x)} + h_{п(x-2)},$$

где слагаемые в правой части уравнения — это потери напора на участках от входа в насадок до сечения x и от сжатого сечения x до выходного участка;

$$h_{п(1-x)} = \zeta_0 \frac{v_x^2}{2g}; \quad h_{п(x-2)} = \frac{(v_x - v)^2}{2g},$$

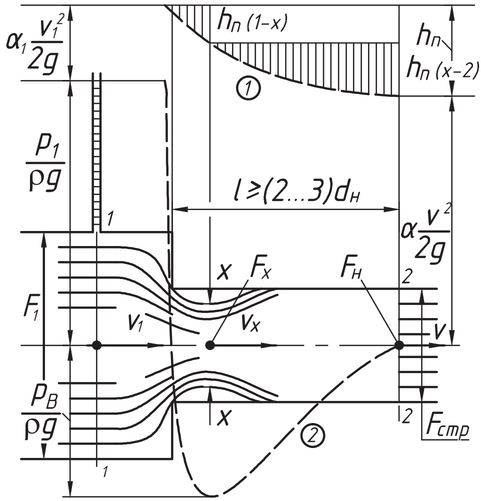


Рис. 2.4

и тогда

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta_0 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v)^2}{2g},$$

где ζ_0 — коэффициент сопротивления отверстия с острой кромкой.

По уравнению постоянства расхода

$$vF_н = v_x F_x; \quad v_x = \frac{v}{\varepsilon_x}.$$

Значение коэффициента сжатия струи ε_x при входе в насадок зависит от соотношения площадей $F_н$ и F_1 и может быть найдено по эмпирической формуле, приведенной в задаче 2.2. Тогда коэффициент сопротивления всего насадка и коэффициент скорости могут быть определены по формулам

$$\zeta = \zeta_0 \frac{1}{\varepsilon_x^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon_x} - 1\right)^2; \quad \varphi_н = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta - \left(\dfrac{F_н}{F_1}\right)^2}}.$$

Для рассматриваемого насадка при $d_н = d_{стр}$ имеем коэффициент сжатия струи $\varepsilon_н = 1$, а так как $\mu_н = \varepsilon_н \varphi_н$, получаем $\mu_н = \varphi_н$. Скорость истечения и расход через насадок определяют по следующим формулам:

$$v=\varphi_{\text{н}}\sqrt{2gH};\qquad Q=vF_{\text{н}},$$

где

$$H=\frac{p_1}{\rho g}.$$

Линия напора *1* и пьезометрическая линия *2*, показанные на рис. 2.4, наглядно отображают изменение полного и гидростатического напоров по длине насадка до его выходного сечения. Значение пьезометрического напора $\dfrac{p}{\rho g}$ в любом сечении насадка определяется вертикальным расстоянием от оси насадка до пьезометрической линии, а значение скоростного напора $\alpha\dfrac{v^2}{2g}$ — вертикальным расстоянием между пьезометрической линией и линией напора.

Примечание. При условии $v_x>v$ в сечении x возникает вакуум. Чем больше значение v_x, тем меньше абсолютное давление (больше вакуум) в сжатом сечении. Наибольшим вакуум $p_{\text{в}}$ будет в этом случае тогда, когда абсолютное давление в сжатом сечении достигнет значения $p_{\text{н.п}}$. Вакуумметрическую высоту определяют по выражению

$$\frac{p_{\text{в}}}{\rho g}=\frac{p_{\text{атм}}-p_x}{\rho g}=\frac{v}{g}\,(v_x-v)=2\varphi_{\text{н}}^2\left(\frac{1}{\varepsilon_x}-1\right)H$$

(формула получена из записи уравнения Бернулли).

Истечение через насадок в атмосферу с заполнением выходного сечения насадка возможно только при напорах, меньших предельного (при $H\geqslant H_{\text{пр}}$ происходит срыв режима работы насадка):

$$H_{\text{пр}}=\frac{p_{\text{атм}}-p_{\text{н.п}}}{2\varphi_{\text{н}}^2\left(\dfrac{1}{\varepsilon_x}-1\right)\rho g}.$$

Задача 2.3. По трубопроводу (рис. 2.5) диаметром $D=50$ мм, заканчивающемуся сходящимся соплом диаметром $d=25$ мм ($\zeta=0{,}06$), керосин ($\rho=700$ кг/м^3) под давлением поступает в большую емкость с отрицательным избыточным давлением (вакуумом). Показания манометра M и вакуумметра V равны соответственно 200 кПа и 40 кПа. Определить скорость истечения и расход через насадок.

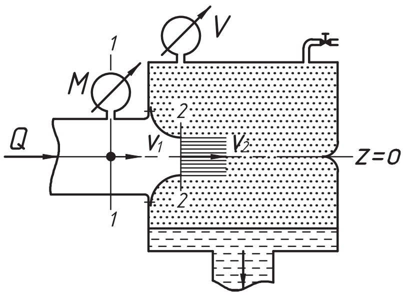


Рис. 2.5

Решение. Для определения скорости истечения запишем уравнение Бернулли в избыточной системе давлений для сечений *1–1* и *2–2* с плоскостью отсчета $z = 0$, совпадающей с осевой линией трубопровода:

$$\frac{p_и}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = -\frac{p_в}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}.$$

Полагая, что режим турбулентный, считаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Имеем

$$\frac{p_и + p_в}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g}(1+\zeta) - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Из уравнения постоянства расхода получим

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4}; \quad v_1 = v_2\left(\frac{d}{D}\right)^2 = v_2\left(\frac{25}{50}\right)^2 = 0{,}25 v_2.$$

Тогда

$$\frac{p_и + p_в}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g}(1+\zeta - 0{,}0625) = 0{,}9975 \frac{v_2^2}{2g};$$

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{p_и + p_в}{\rho g \cdot 0{,}9975}} = \sqrt{19{,}62 \cdot \frac{200\,000 + 40\,000}{850 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9975}} = 23{,}79 \text{ м/с}.$$

Искомый расход через сопло равен

$$Q = v_2 \frac{\pi d^2}{4} = 23{,}79 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 625 \cdot 10^{-6} = 11{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^3 = 11{,}67 \text{ л/с}.$$

Примечание. Если поддерживать постоянными условия входа жидкости в сопло $p_и = p_{с1}$ (показание манометра M не изменяется), а абсолютное давление на выходе из сопла p_{c2} уменьшать (увеличивать вакуум, откачивая газ из емкости), то может иметь место явление кавитационного «запирания» сопла. При достижении давлением в сечении *2–2* значения давления насыщенных паров жидкости при определенной температуре скорость истечения, а следовательно и расход, будут максимальными:

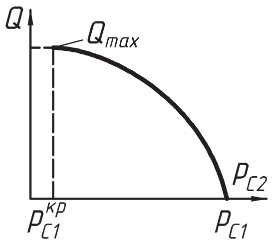


Рис. 2.6

$$p_{c2}^{\text{кр}} = p_{\text{н.п}} \Rightarrow v_{\max} \Rightarrow Q_{\max}.$$

Дальнейшее уменьшение давления p_{c2} уже не приведет к увеличению расхода через сопло. На рис. 2.6 показана зависимость расхода Q от давления p_{c2}.

Задача 2.4. Газ, заполняющий вертикальную трубу (рис. 2.7), вытекает в атмосферу через два насадка диаметром $d = 10$ мм, расположенные по высоте трубы на расстоянии $a = 100$ м друг от друга. Коэффициент расхода для насадков (с учетом сопротивления подводящих горизонтальных трубок) $\mu = 0{,}95$. Определить массовый расход газа через каждый насадок, если показание спиртового манометра, присоединенного к трубе у нижнего насадка, $h_{\text{сп}} = 200$ мм (плотность спирта $\rho_{\text{сп}} = 800$ кг/м^3). Давление атмосферного воздуха на уровне нижнего насадка $h_{\text{бар}} = 745$ мм рт. ст., температура воздуха и газа $t = 20\,°\text{C}$.

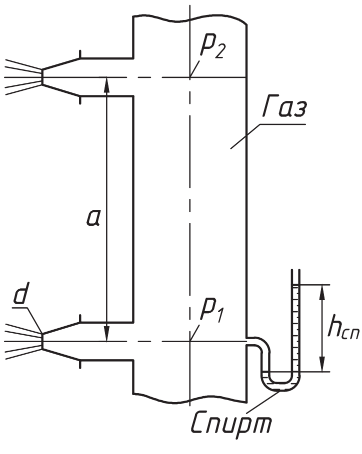


Рис. 2.7

Значения удельной газовой постоянной воздуха $R_{\text{в}} = 287$ Дж/(кг · K), газа $R_{\text{г}} = 530$ Дж/(кг · K). Скоростным напором и потерями в трубе пренебречь, плотности воздуха и газа принять постоянными по высоте a.

Решение. Атмосферное давление на уровне нижнего насадка

$$p_{\text{атм}} = \rho_{\text{рт}} g h_{\text{бар}} = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}745 = 99\,395 \text{ Па}.$$

Абсолютное давление газа в трубе на том же уровне

$$p_1 = p_{\text{атм}} + \rho_{\text{сп}} g h_{\text{сп}} = 99\,395 + 800 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 = 100\,965 \text{ Па}.$$

Значения плотности воздуха и газа при заданных условиях можно определить из уравнений состояния:

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} = R_{\text{в}} T; \quad \rho_{\text{в}} = \frac{p_{\text{атм}}}{R_{\text{в}} T} = \frac{99\,359}{287 \cdot 293} = 1{,}182 \text{ кг/м}^3;$$

$$\frac{p_1}{\rho_{\text{г}}} = R_{\text{г}} T; \quad \rho_{\text{г}} = \frac{p_1}{R_{\text{г}} T} = \frac{100\,965}{530 \cdot 293} = 0{,}65 \text{ кг/м}^3.$$

Атмосферное давление на уровне верхнего насадка

$$p'_{\text{атм}} = p_{\text{атм}} - \rho_{\text{в}} g a = 99\,395 - 1{,}182 \cdot 9{,}81 \cdot 100 = 98\,235 \text{ Па}.$$

Давление газа на уровне верхнего насадка

$$p_2 = p_1 - \rho_{\text{г}} g a = 100\,965 - 0{,}65 \cdot 9{,}81 \cdot 100 = 100\,327 \text{ Па}.$$

Напоры при истечении газа через нижний H_1 и верхний H_2 насадки:

$$H_1 = \frac{p_1 - p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{г}} g} = \frac{100\,965 - 99\,395}{0{,}65 \cdot 9{,}81} = 246{,}3 \text{ м};$$

$$H_2 = \frac{p_2 - p'_{\text{атм}}}{\rho_{\text{г}} g} = \frac{100\,327 - 98\,235}{0{,}65 \cdot 9{,}81} = 328{,}1 \text{ м}.$$

Объемные расходы газа через эти насадки

$$Q_1 = \mu F_{\text{н}} \sqrt{2gH_1} = 0{,}95 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{19{,}62 \cdot 246{,}3} = 5{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с};$$

$$Q_2 = \mu F_{\text{н}} \sqrt{2gH_2} = 5{,}98 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Массовые расходы соответственно равны

$$M_1 = \rho_{\text{г}} Q_1 = 0{,}65 \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-3} = 3{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с};$$

$$M_2 = \rho_{\text{г}} Q_2 = 0{,}65 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{-3} = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \text{кг/с}.$$

3. Местные гидравлические сопротивления

Местными сопротивлениями называют короткие участки трубопроводов (вентиль, диафрагма, внезапное расширение, колено и пр.), на которых вследствие деформирования потока изменяется значение или направление скорости движения жидкости. Это явление связано с изменениями формы и размеров русла, в котором движется поток.

Потери энергии (напора) в местных сопротивлениях, отнесенные к единице веса потока жидкости, называют местными потерями напора и подсчитывают по общей формуле

$$h_{\text{м}} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

где v — средняя скорость потока (обычно в сечении трубопровода за местным сопротивлением или до него); ζ — безразмерный коэффициент местного сопротивления.

Значения коэффициента местного сопротивления в большинстве случаев получают из опытов, на основании которых составляют таблицы или строят соответствующие графики. Однако для некоторых местных сопротивлений потерю напора можно достаточно точно найти чисто теоретическим путем. Например, случай внезапного расширения трубопровода подробно рассматривается в лекционном материале дисциплины «Механика жидкости и газа».

В общем случае величина ζ зависит от формы местного сопротивления, шероховатости его стенок, условий входа и выхода из него жидкости и основного критерия гидродинамического подобия напорных потоков — числа Рейнольдса. Число Re обычно определяют для сечения трубопровода, в котором находится местное сопротивление:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu},$$

где v и Q — средняя скорость и расход потока в трубе; d — диаметр трубы; ν — коэффициент кинематической вязкости.

При числах $\mathrm{Re} \geqslant 10^5$ для большинства местных сопротивлений в трубопроводах имеет место турбулентная автомодельность, потери напора пропорциональны квадрату скорости и коэффициент местного сопротивления ζ не зависит от числа Re (квадратичная зона сопротивления). Значения ζ в указанном диапазоне чисел Re для различных местных сопротивлений можно найти в справочной литературе*.

Расчетные формулы и значения ζ для некоторых местных сопротивлений даны в табл. 1.

Ряд сужающих устройств (диафрагма, сопло и труба Вентури), создающих перепад давлений в потоке, может быть использован для экспериментального определения расхода. На рис. 3.1 представлена

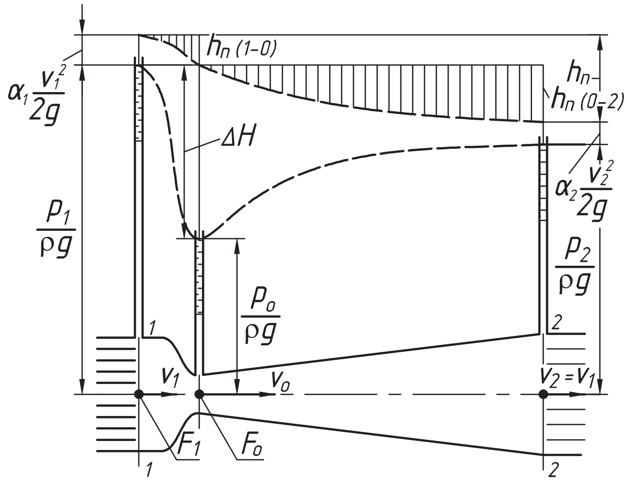


Рис. 3.1

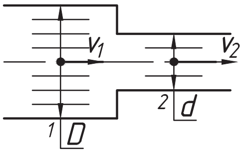
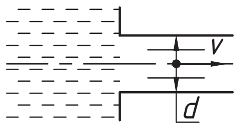
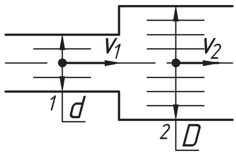
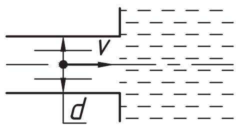
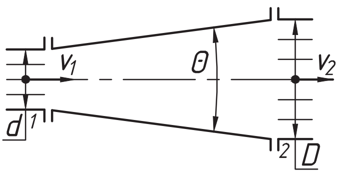
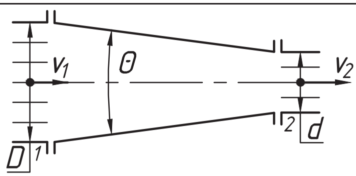
схема расходомера Вентури. Расход определяют по формуле

$$Q = \mu F_0 \sqrt{2g\Delta H},$$

где μ — безразмерный коэффициент расхода; $F_0 = \dfrac{\pi d_0^2}{4}$ — наименьшая проходная площадь расходомера; ΔH — падение гидростати-

* *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 559 с.

Таблица 1

Вид местного сопротивления	Расчетные формулы
	Внезапное сужение $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g};$ $\zeta = 0{,}5\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^2\right]$
	Вход в трубу из резервуара $h_м = \zeta \dfrac{v^2}{2g};$ $\zeta = 0{,}5$
	Внезапное расширение $h_м = \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2g};$ если $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g},$ то $\zeta = 0{,}5\left[\left(\dfrac{d}{D}\right)^2 - 1\right]$
	Выход из трубы в резервуар $h_м = \zeta \dfrac{v}{2g};$ $\zeta = 1$
	Конический диффузор $h_м = \varphi_д \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2g};$ если $\theta = 10°$, то $\zeta = 0{,}25$
	Конический конфузор $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g};$ если $\dfrac{D}{d} = 2$ и $\theta = 10°$, то $\zeta = 0{,}07$

ческого напора на участке между входным и суженным сечениями потока в расходомере.

Значение μ определяется опытным путем и зависит от конструктивных форм расходомера, отношения площадей $\dfrac{F_0}{F_1}$ $\left(F_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}\right.$ — проходная площадь трубопровода$\Big)$, расположения мерных точек, а также от числа Рейнольдса $\left(\mathrm{Re} = \dfrac{4Q}{\pi d_1 \nu}\right)$. Зона турбулентной автомодельности по коэффициенту расхода μ имеет место при значениях $\mathrm{Re} > 10^5 \ldots 10^6$.

Потери напора в расходомере вычисляют по общему выражению $h_{\text{п}} = \zeta \dfrac{v^2}{2g}$, где v — средняя скорость в трубопроводе; ζ — суммарный коэффициент сопротивления в расходомере, определяемый также опытным путем.

Значения μ и ζ в зоне турбулентной автомодельности можно приближенно определять и расчетным путем:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta - \alpha_1 \left(\dfrac{F_0}{F_1}\right)^2}}; \qquad \zeta = \zeta_{\text{с}} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2 + \varphi_{\text{д}} \left(\frac{F_1}{F_0} - 1\right)^2.$$

В этих формулах $\zeta_{\text{с}}$ — коэффициент сопротивления сходящегося сопла расходомера; $\varphi_{\text{д}}$ — коэффициент потерь в диффузоре; α_1 и α_2 — значения коэффициента кинетической энергии в соответствующих сечениях (при больших числах Re можно принять $\alpha_1 = \alpha_2 \cong 1$).

Задача 3.1. В трубопроводе диаметром $D = 50$ мм, подающем воду в открытый бак с постоянным уровнем $h = 5$ м (рис. 3.2), установлено мерное сопло диаметром $d = 30$ мм ($\zeta_{\text{с}} = 0{,}08$) и вентиль ($\zeta_{\text{в}} = 5$). Показание манометра M, установленного перед соплом, равно 120 кПа. Определить: а) расход Q в трубопроводе, учитывая только местные потери напора; б) при этом расходе показание $h_{\text{рт}}$ ртутного дифференциального манометра, измеряющего перепад давлений в сечениях потока перед соплом и на выходе из него. Сжатие струи на выходе из сопла отсутствует. Построить линию полного напора и пьезометрическую линию.

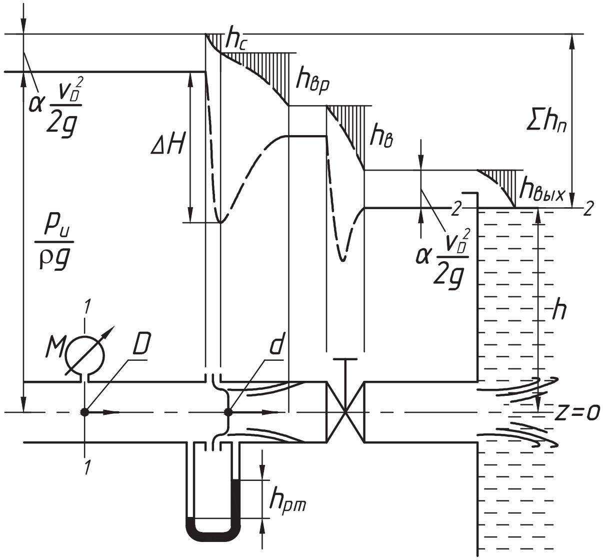


Рис. 3.2

Решение. а) Для определения расхода в трубопроводе воспользуемся сначала уравнением Бернулли, записанным для двух выбранных сечений и плоскости отсчета $z=0$ (полагая режим движения турбулентным, считаем $\alpha_1 = 1$):

$$\frac{p_и}{\rho g}+\frac{v_D^2}{2g}=h+\zeta_с\frac{v_d^2}{2g}+\frac{(v_d-v_D)^2}{2g}+\zeta_в\frac{v_D^2}{2g}+\zeta_{вых}\frac{v_D^2}{2g};$$

$$\frac{p_и}{\rho g}-h=\frac{v_D^2}{2g}(\zeta_в+\zeta_{вых}-1)+\zeta_с\frac{v_d^2}{2g}+\frac{(v_d-v_D)^2}{2g}.$$

Согласно уравнению постоянства расхода

$$v_d=v_D\left(\frac{D}{d}\right)^2=v_D\left(\frac{50}{30}\right)^2=2{,}77v_D.$$

Тогда $\frac{p_и}{\rho g}-h=0{,}44v_D^2$; $v_D=\sqrt{\frac{p_и/(\rho g)-h}{0{,}44}}=4{,}05$ м/с. Искомый расход $Q=v_D\frac{\pi D^2}{4}=4{,}05\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}0025=7{,}95\cdot 10^{-3}$ м/с$^3\cong 8$ л/с.

б) Показание ртутного дифференциального манометра можно получить из формулы расхода через сопло $Q = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g\Delta H}$, где коэффициент расхода через сопло

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_{\text{с}} - \alpha_1 \left(\frac{d}{D}\right)^4}}.$$

Считая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ при турбулентном режиме движения жидкости, получаем $\mu = 1{,}026$.

Перепад напоров до и после сопла в метрах водяного столба

$$\Delta H = \frac{16Q^2}{\mu^2 \pi^2 d^4 \cdot 2g} = 6{,}17 \text{ м}.$$

Так как для ртутного дифференциального манометра

$$\Delta H = \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho}{\rho} h_{\text{рт}},$$

при $\rho = 1000$ кг/м^3 и $\rho_{\text{рт}} = 13\,600$ кг/м^3

$$h_{\text{рт}} = \frac{\Delta H}{12{,}6} = \frac{6{,}17}{12{,}6} = 0{,}490 \text{ м} = 490 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача 3.2. Вода перетекает из верхнего открытого резервуара в нижний по диффузору, диаметры которого $d = 250$ мм и $D = 500$ мм (рис. 3.3). Коэффициент сопротивления плавно сходящегося входного участка $\zeta_{\text{с}} = 0{,}06$, а коэффициент потерь в диффузоре $\varphi_{\text{д}} = 0{,}25$. Уровни в баках постоянны, а высоты $h_1 = 1$ м; $h_2 = 1{,}5$ м; $h_3 = 0{,}5$ м. Определить расход $Q_{\text{д}}$ через диффузор и значение давления p_x в сечении x–x. Построить график напоров. Как изменятся расход $Q_{\text{тр}}$ и давление p'_x, если диффузор заменить цилиндрической трубой диаметром $d = 250$ мм и длиной $l = h_2 + h_3$, имеющей коэффициент сопротивле-

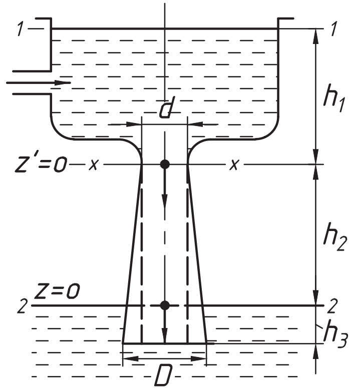


Рис. 3.3

ния трения $\lambda = 0{,}025$? Коэффициент сопротивления трубы ζ определить по формуле $\zeta = \lambda l/d$.

Решение. Уравнение Бернулли, записанное для сечений *1–1* и *2–2* при выбранной плоскости отсчета $z = 0$, имеет вид

$$h_1 + h_2 = \zeta_с \frac{v_d^2}{2g} + \varphi_д \frac{(v_d - v_D)^2}{2g} + \zeta_{вых} \frac{v_D^2}{2g}.$$

Из уравнения постоянства расхода следует

$$v_D = v_d\left(\frac{d}{D}\right)^2 = v_D\left(\frac{250}{500}\right)^2 = 0{,}25 v_d.$$

Тогда

$$h_1 + h_2 = 0{,}06\frac{v_d^2}{2g} + 0{,}14\frac{v_d^2}{2g} + 0{,}0625\frac{v_d^2}{2g} = 0{,}2625\frac{v_d^2}{2g};$$

$$v_d = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{0{,}2625}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 2{,}5}{0{,}2625}} = 13{,}67 \text{ м/с}.$$

Искомый расход через диффузор

$$Q_д = v_d \frac{\pi d^2}{4} = 13{,}67 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0625 = 0{,}670 \text{ м/с} = 670 \text{ л/с}.$$

Для определения значения давления p_x в узком сечении перед диффузором запишем уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *x–x* при новой плоскости отсчета $z' = 0$:

$$h_1 = \frac{p_x}{\rho g} + \frac{v_d^2}{2g} + \zeta_с \frac{v_d^2}{2g};$$

$$\frac{p_x}{\rho g} = h_1 - \frac{v_d^2}{2g}(1 + \zeta_с);$$

$$\frac{p_x}{\rho g} = 1 - \frac{186{,}87}{19{,}62} \cdot 1{,}06 = -9{,}09 \text{ м}.$$

Знак минус означает наличие в этом сечении вакуума, равного $p_{вх} = 9{,}09 pg \cong 89$ кПа.

В случае замены диффузора цилиндрической трубой уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* примет вид

$$h_1 + h_2 = \zeta_{\text{c}} \frac{v_d^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v_d^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}} \frac{v_d^2}{2g}.$$

Решая это уравнение относительно v_d, получаем $v_d = 4{,}05$ м/с. Тогда расход через трубу равен

$$Q_{\text{тр}} = 6{,}24 \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0625 = 0{,}306 \text{ м}^3/\text{с} = 306 \text{ л/с}.$$

Следовательно, расход через диффузор больше расхода через трубу при прочих равных условиях в 2,12 раза.

Аналогичный расчет по определению давления p'_x на входе в цилиндрическую трубу приводит к результату $p_{\text{вх}} = 10{,}8$ кПа. График напоров при течении жидкости через диффузор показан на рис. 3.4. Напоры в каждом сечении откладывают по горизонтали таким образом, чтобы ось трубы являлась началом отсчета пьезометрических напоров.

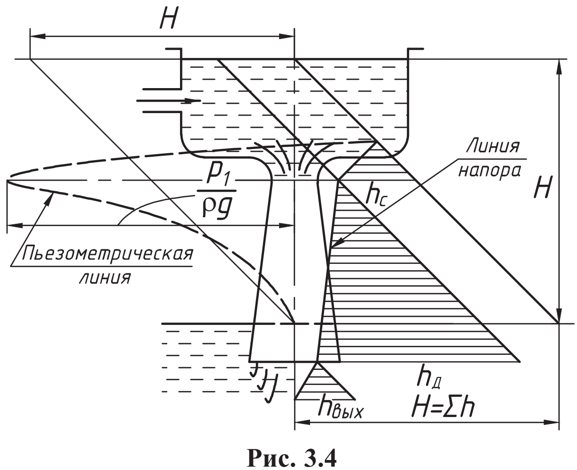


Рис. 3.4

Задача 3.3. Трубка Вентури, установленная на самолете, должна отсасывать воздух из камеры гироскопа, приводя последний во вращение (рис. 3.5). Определить соотношение выходного диаметра d_2 и диаметра горловины трубки d_1, при котором вакуум в горло-

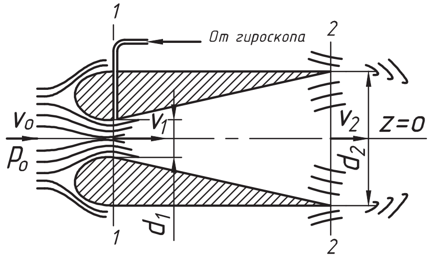


Рис. 3.5

вине будет максимальным. Коэффициент сопротивления сходящегося входного участка трубки $\zeta = 0{,}04$, коэффициент потерь в диффузоре $\varphi_д = 0{,}2$. Сжимаемостью воздуха пренебречь.

Решение. При движении атмосферного воздуха через трубку вакуум в горловине определяют из уравнения Бернулли, записанного в избыточной системе для входного сечения и сечения *1–1*:

$$\frac{v_0^2}{2g} = -\frac{p_{в1}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \zeta\,\frac{v_1^2}{2g}; \qquad \frac{p_{в1}}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g}\,(1+\zeta) - \frac{v_0^2}{2g}, \tag{3.1}$$

где v_0 — скорость самолета.

Уравнение Бернулли для входного сечения и сечения *2–2* в избыточной системе имеет вид

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + \zeta\,\frac{v_1^2}{2g} + \varphi_д\,\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \tag{3.2}$$

Из уравнения постоянства расхода имеем $v_2 = v_1(d_1/d_2)^2$. Обозначив $(d_1/d_2)^2 = x^2$, перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}x^4 + \varphi_д\,\frac{v_1^2}{2g}\,(1 - x^2)^2 + \zeta\,\frac{v_1^2}{2g}. \tag{3.3}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3.1) позволяет представить вакуум в зависимости от отношения d_1/d_2 при заданной скорости самолета v_0:

$$\frac{p_{\text{в}1}}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g}\,(1+\zeta) - \zeta\,\frac{v_1^2}{2g} - \varphi_\text{д}\,\frac{v_1^2}{2g}\,(1-x^2)^2 - \frac{v_1^2}{2g}\,x^4 = \\ = \frac{v_1^2}{2g}\left[1 - \varphi_\text{д}(1-x^2)^2 - x^4\right]. \quad (3.4)$$

Дифференцируем это уравнение по x:

$$0 = -2\varphi_\text{д}(1-x^2)\cdot(-2x) - 4x^3; \quad 4x^2 - 4\varphi_\text{д} + \varphi_\text{д}\cdot 4x^2 = 0;$$

$$x^2 = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{x^2} = 6.$$

Следовательно, $d_1/d_2 = 2{,}45$.

Выражая из уравнения (3.3) v_1^2 через v_0^2:

$$v_1^2 = \frac{v_0^2}{x^4 + \varphi_\text{д}(1-x^2)^2 + \zeta} = \frac{v_0^2}{0{,}028 + 0{,}139 + 0{,}04} = \frac{v_0^2}{0{,}207}$$

и решая уравнение (3.1), получаем максимальное значение вакуума в горловине трубки:

$$\frac{p_{\text{в}1}}{\rho g} = \frac{v_0^2}{0{,}207\cdot 2g}\cdot 1{,}04 - \frac{v_0^2}{2g} = 4\,\frac{v_0^2}{2g}; \quad p_{\text{в}1} = 2\rho v_0^2.$$

4. Расчет простых трубопроводов

Простым называют трубопровод, по которому жидкость транспортируется от питателя к приемнику без промежуточных разветвлений потока. Жидкость движется по трубопроводу благодаря тому, что ее энергия в начале трубопровода больше, чем в конце. Питателями и приемниками в гидросистемах могут являться различные технические устройства — насосы, гидродвигатели, гидропневмоаккумуляторы, резервуары и др. Трубопровод может иметь постоянный диаметр по всей длине или состоять из ряда последовательно соединенных участков с различными диаметрами.

Исходным при расчете простого трубопровода является уравнение баланса напоров (уравнение Бернулли). Так, для трубопровода, имеющего постоянный диаметр d, длину l (между сечениями *1–1* и *2–2*) и три местных сопротивления с коэффициентами ζ_1, ζ_2 и ζ_3 (рис. 4.1), это уравнение имеет вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = H_0 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{\text{п}},$$

так как $v_1 = v_2$, $\dfrac{p_1}{\rho g} - \left(H_0 + \dfrac{p_2}{\rho g}\right) = \sum h_{\text{п}}$. Введя понятие располагаемого напора трубопровода $H = \dfrac{p_1}{\rho g} - \left(H_0 + \dfrac{p_2}{\rho g}\right)$, который пред-

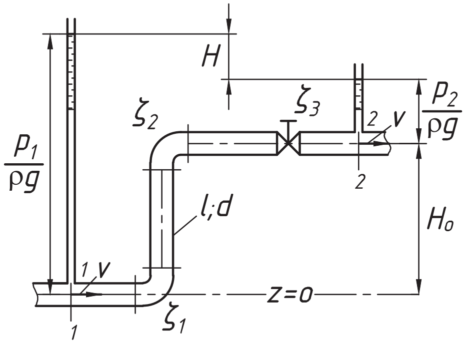


Рис. 4.1

ставляет собой перепад гидростатических напоров в сечениях *1–1* и *2–2* и выражается разностью пьезометрических уровней в этих сечениях, получим расчетное уравнение простого трубопровода:

$$H = \sum h_{\text{п}}. \tag{4.1}$$

Это уравнение соответствует процессу, в котором весь располагаемый напор затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений. Необходимо заметить, что показанные на рис. 4.1 уровни жидкости в пьезометрах можно рассматривать и в более общем смысле как пьезометрические уровни в питателе и приемнике.

Потери напора на трение по длине и местные потери выражаются общими формулами

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{lv^2}{d \cdot 2g}; \quad h_{\text{м}} = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Для рассмотренного выше простого трубопровода длиной l и с постоянным диаметром d уравнение (4.1) имеет вид

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right),$$

где $\sum \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$. Выражая скорость через расход и принимая $g = 9{,}81$ м/с^2, получаем

$$H = 0{,}0827 \frac{Q^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right), \tag{4.2}$$

где Q — расход, м^3/с; величины H, l и d выражены в метрах.

При расчете длинных трубопроводов, в которых доминируют потери напора на трение по длине, целесообразно заменить местные сопротивления эквивалентными длинами в соответствии с соотношением $l_{\text{э}} = \zeta d/\lambda$. При такой замене расчетное уравнение (4.2) можно представить в форме, отвечающей трубопроводу без местных сопротивлений:

$$H = \lambda \frac{Lv^2}{d \cdot 2g} = 0{,}0827\lambda \frac{L}{d^5} Q^2,$$

где $L = l + \sum l_{\text{э}}$ — приведенная длина трубопровода.

В случае если трубопровод включает в себя n последовательных участков с различными диаметрами, имеем аналогичное соотношение

$$H = 0{,}0827 \sum_{1}^{n} \lambda_i \frac{L_i}{d_i^5} Q^2.$$

Приведенные выше расчетные зависимости являются общими и применяются при решении задач, соответствующих схеме «питатель — трубопровод — приемник».

В случае истечения жидкости от питателя через трубопровод в атмосферу (рис. 4.2) уравнение Бернулли имеет вид

$$H = \alpha_\text{к} \frac{v_\text{к}^2}{2g} + \sum h_\text{п},$$

где H — располагаемый напор трубопровода, определяемый высотой пьезометрического уровня в резервуаре-питателе над центром выходного сечения трубопровода; $\alpha_\text{к} \dfrac{v_\text{к}^2}{2g}$ — скоростной напор в выходном сечении; $\sum h_\text{п}$ — сумма потерь напора в трубопроводе.

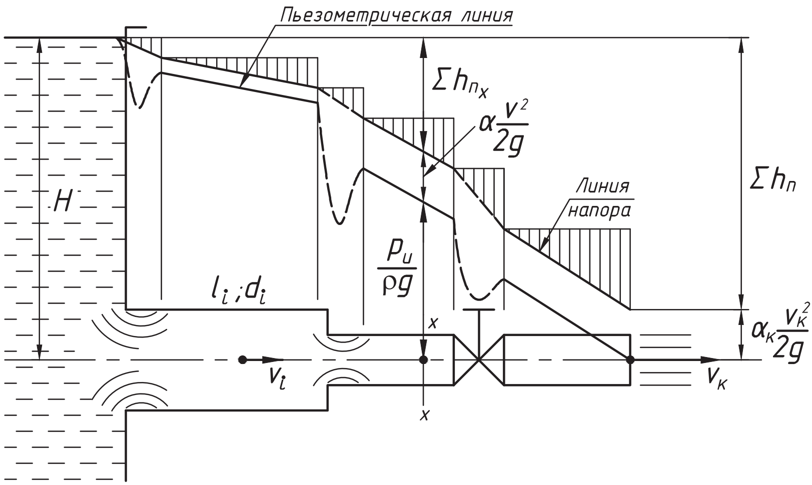


Рис. 4.2

Линия напора и пьезометрическая линия, показанные на рис. 4.2, отражают изменение по длине трубопровода полного напора потока и его составляющих. Линию напора (удельной механической энергии потока) строят путем последовательного вычитания потерь, нарастающих вдоль потока, из начального значения напора потока (заданного пьезометрическим уровнем в питающем резервуаре). Пьезометрическую линию (показывающую изменение гидростатического напора потока) строят путем вычитания скоростного напора в каждом сечении из полного напора потока.

Значение пьезометрического напора $\frac{p_\text{и}}{\rho g}$ в каждом сечении (например, $p_\text{и}$ — избыточное давление в сечении $x–x$) определяется на графике как заглубление центра сечения под пьезометрической линией, а значение скоростного напора $\alpha \frac{v^2}{2g}$ — вертикальным расстоянием между пьезометрической линией и линией напора. На участках местной деформации потока, где ход изменения напоров может быть показан только качественно, линии напоров обозначены штриховой линией.

Возможные варианты расчета трубопровода сведены в табл. 2. Знаком «×» обозначены заданные параметры, а знаком «?» — параметр, который нужно определить в той или иной задаче (Δ — эквивалентная абсолютная шероховатость трубопровода; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости).

Таблица 2

Номер варианта	Параметр					
	H	Q	d	l	Δ	ν
I	?	×	×	×	×	×
II	×	?	×	×	×	×
III	×	×	?	×	×	×

Ниже приведена методика решений этих вариантов на примере трубопровода с постоянным диаметром d.

Вариант I. 1. По известным значениям Q, d, ν находят число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi d \nu}$ и определяют режим движения жидкости.

2. В случае ламинарного режима напор H определяют как

$$H = \frac{32Lv\nu}{gd^2} = \frac{128LQ\nu}{\pi gd^4}.$$

При турбулентном режиме напор H определяют по формулам

$H = \frac{v^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)$ — для коротких трубопроводов,

$H = \lambda \frac{Lv^2}{d \cdot 2g} = 0{,}0827\lambda \frac{L}{d^5} Q^2$ — для длинного трубопровода, где преобладают потери на трение.

В этих формулах по известным значениям Re, d и Δ выбирают соответствующие значения ζ и λ.

Вариант II. 1. Определяют режим движения путем сравнения напора H с его критическим значением:

$$H_{\text{кр}} = \frac{32\nu^2 L}{gd^3} \text{Re}_{\text{кр}}, \quad \text{Re}_{\text{кр}} = 2300.$$

Если $H < H_{\text{кр}}$, режим ламинарный, если $H > H_{\text{кр}}$ — турбулентный.

2. В случае ламинарного режима расход определяют по формуле

$$Q = \frac{H\pi gd^4}{128L\nu}.$$

В случае турбулентного режима задачу решают методом последовательных приближений. В качестве первого приближения принимают квадратичную область сопротивления, в которой по известным d и Δ определяют значения λ и ζ, позволяющие найти либо v, либо Q из формул, приведенных в варианте I. Подсчет числа Re по одному из найденных параметров дает возможность уточнить значения коэффициентов сопротивления и определить расход во втором приближении, что обычно оказывается достаточным.

Примечание. В некоторых случаях можно применять графический метод решения такого рода задач, когда строится характеристика трубопровода по уравнениям связи между H и Q (приведены ранее для ламинарного и турбулентного режимов с учетом зависимости λ и ζ от числа Re, т. е. от расхода Q). В этом случае графическая характеристика трубопровода может рассматриваться как зависимость суммарных потерь напора в трубопроводе от расхода, т. е. $\sum h_{\text{п}} = f(Q)$.

Вариант III. 1. Определяют режим движения путем сравнения напора H с его критическим значением

$$H_{\text{кр}} = \frac{\pi^3 \nu^5 L}{2gQ^3} \, \text{Re}^4_{\text{кр}}, \qquad \text{Re}_{\text{кр}} = 2300.$$

Если $H < H_{\text{кр}}$, режим ламинарный, если $H > H_{\text{кр}}$ — турбулентный.

2. В случае ламинарного режима диаметр определяют по формуле

$$d = \sqrt[4]{\frac{128LQ\nu}{\pi g H}},$$

при турбулентном режиме

$$d = \sqrt[5]{\frac{0{,}0827\lambda L Q^2}{H}}.$$

Задача по определению диаметра трубопровода d может быть решена и графически, путем построения зависимости $H = f(d)$ при $Q = \text{const}$. Задавая ряд значений d, вычисляют соответствующие значения напора H по приведенным в варианте I уравнениям связи между значениями H и Q с учетом области сопротивления. Из построенного графика по заданному значению H определяют необходимый диаметр d. Далее следует уточнить значение H при выборе ближнего большего стандартного диаметра.

Задача 4.1. Из резервуара-питателя с избыточным давлением над свободной поверхностью, равным 50 кПа по показаниям манометра M, масло (плотность $\rho = 950$ кг/м^3, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}725$ Ст) по горизонтальной трубе диаметром $d = 30$ мм и длиной $l = 40$ м вытекает в атмосферу. Заглубление осевой линии трубы под уровень $H = 3$ м. Определить расход Q. Сопротивлением входа в трубу пренебречь (рис. 4.3).

Решение. Запишем уравнение Бернулли в избыточной системе давлений для сечений *1–1* и *2–2*:

$$H + \frac{p_{\text{и}}}{\rho g} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{п}}.$$

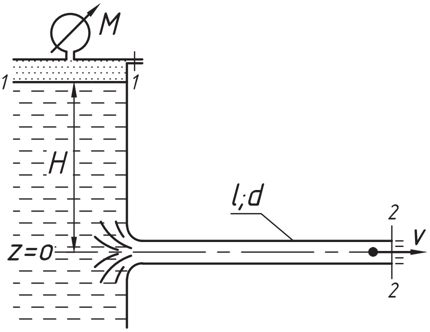


Рис. 4.3

В этом уравнении коэффициент кинетической энергии α_2 и потери напора на трение $h_п$ зависят от режима движения жидкости в трубе. Режим движения может быть определен путем сравнения располагаемого напора $H_\Sigma = H + \dfrac{p_и}{\rho g}$ с его критическим значением $H_{кр} = \dfrac{32\nu^2 L}{gd^3}\,\mathrm{Re}_{кр}$:

$$H_\Sigma = 3 + \frac{50\,000}{950\cdot 9{,}81} = 8{,}36 \text{ м};$$

$$H_{кр} = \frac{32\cdot(0{,}725)^2\cdot 10^{-8}\cdot 40\cdot 2300}{9{,}81\cdot 27\cdot 10^{-6}} = 58{,}35 \text{ м}.$$

Так как $H_\Sigma < H_{кр}$, режим движения жидкости ламинарный. Следовательно, в уравнении Бернулли $\alpha_2 = 2$, $v_2 = v$ — средняя скорость движения жидкости в трубе, потери напора на трение $h_п = \dfrac{32Lv\nu}{gd^2}$, тогда

$$H + \frac{p_и}{\rho g} = 2\frac{v^2}{2g} + \frac{32Lv\nu}{gd^2}.$$

Если предположить, что скоростной напор на выходе мал $\left(\alpha_2 \dfrac{v_2^2}{2g} \cong 0\right)$, то значение скорости в соответствии с последним выражением

$$v = \left(H + \frac{p_и}{\rho g}\right)\frac{gd^2}{32L\nu} = \frac{8{,}36\cdot 9{,}81\cdot 9\cdot 10^{-4}}{32\cdot 40\cdot 0{,}725\cdot 10^{-4}} = 0{,}79 \text{ м/с}.$$

Наличие ламинарного движения жидкости в трубе подтверждается значением соответствующего числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{0{,}79 \cdot 0{,}03}{0{,}725 \cdot 10^{-4}} = 327 < 2300.$$

Предположение о малости скоростного напора на выходе также подтверждается расчетом:

$$\alpha_2 \frac{v^2}{2g} = 2\,\frac{(0{,}79)^2}{19{,}62} = 0{,}06 \text{ м} \ll H_\Sigma = 8{,}36 \text{ м}.$$

Искомый расход равен

$$Q = v\,\frac{\pi}{4}\,d^2 = 0{,}79 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 5{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с} = 0{,}56 \text{ л/с}.$$

Задача 4.2. По трубопроводу диаметром $d = 0{,}4$ м и длиной $l = 3000$ м подается нефть (плотность $\rho = 880$ кг/м^3, коэффициент динамической вязкости $\mu = 0{,}22$ П) из магистрали с заданным избыточным давлением, равным 200 кПа по показаниям манометра M, при перепаде высот $H = 10$ м. Шероховатость стенок трубопровода $\Delta = 0{,}2$ мм. Определить расход нефти Q. В трубопроводе учитывать только потери напора на трение по длине (рис. 4.4).

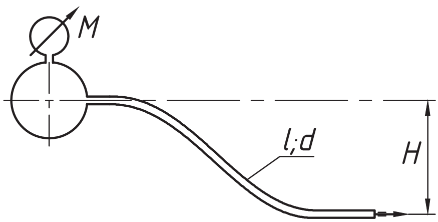


Рис. 4.4

Решение. Располагаемый напор в данной задаче равен

$$H_\Sigma = H + \frac{p_\text{и}}{\rho g} = 10 + \frac{200\,000}{880 \cdot 9{,}81} = 33{,}17 \text{ м}.$$

Уравнение Бернулли для трубопровода имеет вид

$$H_\Sigma = \alpha_\text{к}\,\frac{v_\text{к}^2}{2g} + \sum h_\text{п}.$$

При расчете длинного трубопровода с преобладающими потерями на трение скоростным напором в выходном сечении можно пренебречь: $\alpha_к \dfrac{v_к^2}{2g} \cong 0$. Режим движения жидкости по трубопроводу можно определить после нахождения значения $H_{кр}$ и сравнения его со значением H_Σ, но для этого необходимо сначала определить коэффициент кинематической вязкости ν:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}22 \cdot 0{,}1}{880} = 0{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ м/с};$$

$$H_{кр} = \frac{32\nu^2 L}{gd^3}\,\mathrm{Re}_{кр} = \frac{32 \cdot 0{,}0625 \cdot 10^{-8} \cdot 3000 \cdot 2300}{9{,}81 \cdot 0{,}064} = 0{,}22 \text{ м}.$$

Режим движения турбулентный, так как $H_\Sigma > H_{кр}$. По условию учитываем только потери напора на трение: $h_п = \lambda \dfrac{lv^2}{d \cdot 2g}$, и тогда

$$H_\Sigma = \lambda\,\frac{lv^2}{d \cdot 2g}. \tag{4.3}$$

Далее задачу решаем методом последовательных приближений. В качестве первого приближения принимаем квадратичную область сопротивления, в которой по известной относительной шероховатости $d/\Delta = 400/0{,}2 = 2000$ принимаем коэффициент сопротивления трения $\lambda_\mathrm{I} = 0{,}0167$ (зависимость $\lambda = f(\mathrm{Re};\ d/\Delta)$ на рис. 4.5).

Уравнение (4.3) дает возможность определить среднюю скорость движения жидкости в первом приближении:

$$v_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{H_\Sigma d \cdot 2g}{\lambda_\mathrm{I} l}} = \sqrt{\frac{33{,}17 \cdot 0{,}4 \cdot 19{,}62}{0{,}0167 \cdot 3000}} = 2{,}28 \text{ м/с}.$$

При этой скорости определяем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_\mathrm{I} = \frac{v_\mathrm{I} D}{\nu} = \frac{2{,}28 \cdot 0{,}4}{0{,}25 \cdot 10^{-4}} = 3{,}65 \cdot 10^4.$$

Для найденных значений Re_I и d/Δ по графику уточняем $\lambda_\mathrm{II} = 0{,}0234$ и определяем скорость и число Re во втором приближении:

$$v_\mathrm{II} = \sqrt{\frac{33{,}17 \cdot 0{,}4 \cdot 19{,}62}{0{,}0234 \cdot 3000}} = 1{,}92 \text{ м/с}; \quad \mathrm{Re}_\mathrm{II} = 3{,}07 \cdot 10^{-4}.$$

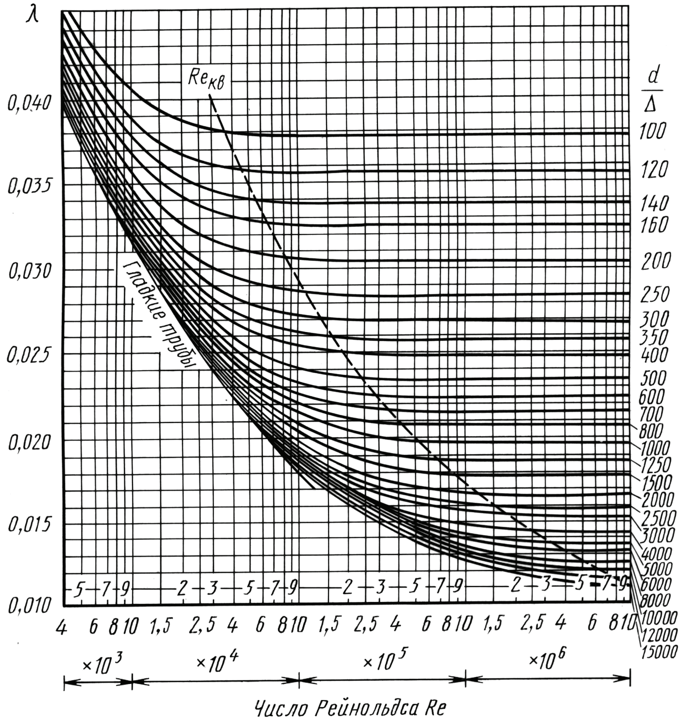


Рис. 4.5

Найденное по графику значение $\lambda_{\text{III}} = 0{,}024$, соответствующее значениям Re_{II} и d/Δ, достаточно близко к λ_{II}, что дает возможность ограничиться при определении расхода вторым приближением:

$$Q = v_{\text{II}} \frac{\pi}{4} d^2 = 1{,}92 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}16 = 0{,}24 \text{ м}^3/\text{с} = 240 \text{ л/с}.$$

Задача 4.3. Центробежный насос должен обеспечить подачу $Q = 10$ л/с жидкости на отметку $H_0 = 15$ м по нагнетательному трубопроводу диаметром $d = 50$ мм и длиной $l = 50$ м (рис. 4.6). Шероховатость стенок трубопровода $\Delta = 0{,}1$ мм; задвижка, установленная в нем, имеет коэффициент сопротивления $\zeta = 5$. Определить давление $p_{\text{н}}$, создаваемое насосом на входе в нагнетательный трубопровод и обеспечивающее заданный режим работы по расходу. В трубопроводе учитывать только потери напора на трение по длине и потери на задвижке. Задачу решить в двух вариантах: а) перекачиваемая жидкость — вода, $\rho_в = 1000$ кг/м^3, $\nu = 1$ сСт; б) масло, $\rho_м = 900$ кг/м^3, $\nu = 50$ сСт.

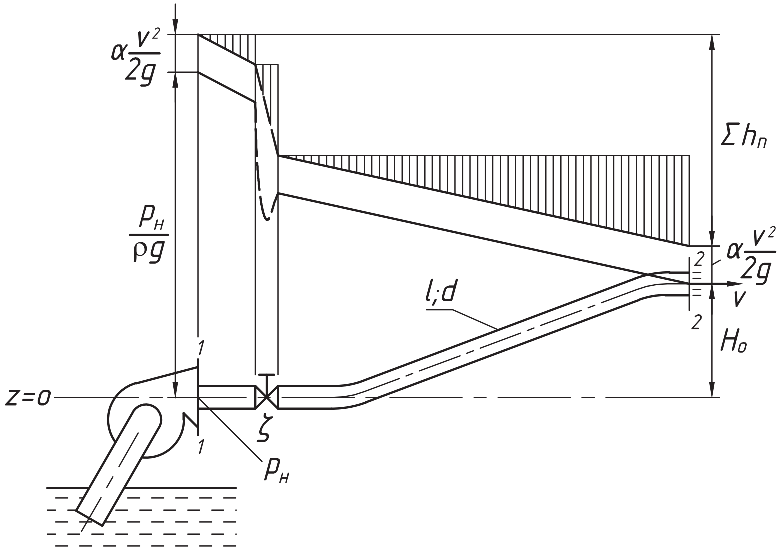


Рис. 4.6

Решение. Уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* имеет вид

$$\frac{p_н}{\rho g} + \alpha\,\frac{v^2}{2g} = H_0 + \alpha\,\frac{v^2}{2g} + \sum h_п,$$

где $\sum h_п = \lambda\,\frac{lv^2}{d\cdot 2g} + \zeta\,\frac{v^2}{2g}$, тогда

$$\frac{p_н}{\rho g} = H_0 + \frac{v^2}{2g}. \qquad (4.4)$$

Разность гидростатических напоров между входным и выходным сечениями трубопровода (рис. 4.7), равная

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_1}{\rho g}\right),$$

представляет собой работу внешних сил по перемещению единицы веса перекачиваемой жидкости. Для нашего случая

$$H = \frac{p_{\text{н}}}{\rho g} - H_0. \qquad (4.5)$$

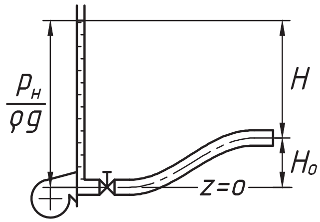


Рис. 4.7

Из уравнений (4.4) и (4.5) следует, что $H = \sum h_{\text{п}}$. Таким образом, эта работа идет на преодоление гидравлических сопротивлений:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta\right).$$

Средняя скорость движения жидкости в трубопроводе (независимо от рода жидкости):

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}01}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 5 \text{ м/с}.$$

Результаты определения значений коэффициента сопротивления трения λ для обеих жидкостей сведены в табл. 3. По предварительно подсчитанным значениям d/Δ и числа Re коэффициент λ может быть определен согласно приводимым в лекциях полуэмпирическим формулам, справочным таблицам* или найден из графика $\lambda = f(\text{Re}, d/\Delta)$ на рис. 4.5.

Таблица 3

Перекачиваемая жидкость	d/Δ	$\text{Re} = vd/\nu$	λ
Вода	500	$2{,}5 \cdot 10^5$	0,0234
Масло	500	$5 \cdot 10^3$	0,0380

Отметим, что найденное значение $\lambda = 0{,}024$ находится в квадратичной зоне сопротивления, а значение $\lambda = 0{,}038$ — в области гидравлически гладких труб.

---

* *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 559 с.

Далее решаем задачу отдельно для каждого варианта:

а) рабочая жидкость — вода:

$$H = \frac{25}{19{,}62}\left(0{,}0234 \cdot \frac{50}{0{,}05} + 5\right) = 36{,}2 \text{ м}; \qquad \frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{в}} g} = 15 + 36{,}2 = 51{,}2 \text{ м};$$

$$p_{\text{н}} = 502 \text{ кПа}.$$

б) рабочая жидкость — масло:

$$H = \frac{25}{19{,}62}\left(0{,}0380 \cdot \frac{50}{0{,}05} + 5\right) = 54{,}8 \text{ м}; \qquad \frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{м}} g} = 15 + 54{,}8 = 69{,}8 \text{ м};$$

$$p_{\text{н}} = 616 \text{ кПа}.$$

Задача 4.4. Для трубопровода диаметром $D = 0{,}5$ м и длиной $L = 1000$ м, снабженного в конце соплом и работающего под напором $H = 400$ м, установить зависимость мощности струи на выходе из сопла и КПД трубопровода от диаметра d выходного отверстия сопла. Определить, при каком значении d мощность струи будет максимальной. Каков будет при этом КПД трубопровода $\eta_{\text{тр}}$? В трубопроводе учитывать только потери на трение по длине ($\lambda = 0{,}02$). Коэффициент сопротивления сопла $\zeta = 0{,}04$, сжатие струи на выходе отсутствует (рис. 4.8).

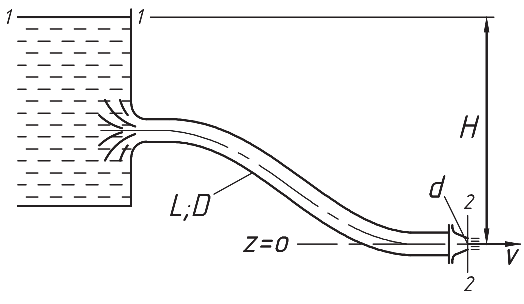


Рис. 4.8

Решение. Запишем уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2*:

$$H = \alpha \frac{v^2}{2g} + \sum h_{\text{п}},$$

где $\alpha = 1$ (режим движения турбулентный), а потери напора

$$\sum h_{\text{п}} = \lambda \frac{L v_{\text{тр}}^2}{D \cdot 2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Средняя скорость движения жидкости в трубопроводе и средняя скорость течения через сопло связаны формулой $v_{\text{тр}} = v(d/D)^2$ (в соответствии с уравнением постоянства расхода). Подставив последнее выражение в уравнение Бернулли, получим

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right].$$

Отсюда

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{H}{1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4}; \qquad v = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4}}.$$

Расход жидкости через сопло

$$Q = vf = v \frac{\pi}{4} d^2.$$

Мощность струи

$$N = \rho Q \frac{v^2}{2} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 v \frac{v^2}{2} = \rho g \frac{\pi}{4} H \sqrt{2gH} \frac{d^2}{\left[1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]^{3/2}} =$$

$$= A \frac{d^2}{\left[1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]^{3/2}},$$

где $A = \rho g \frac{\pi}{4} H \sqrt{2gH} = \text{const}$. Введем обозначение $d^2 = x$. Тогда

$$N = A \frac{x}{\left(1 + \zeta + \lambda \frac{L}{D^5} x^2\right)^{3/2}}.$$

Далее определяем значение d, при котором мощность струи будет максимальной: $dN/dx = 0$. Имеем

$$A\,\frac{\left(1+\zeta+\lambda\,\dfrac{L}{D^5}x^2\right)^{3/2} - x\cdot\dfrac{3}{2}\left(1+\zeta+\lambda\,\dfrac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}\cdot 2\lambda\,\dfrac{L}{D^5}\,x}{\left(1+\zeta+\lambda\,\dfrac{L}{D^5}\,x^2\right)^3} = 0;$$

$$\left(1+\zeta+\lambda\,\frac{L}{D^5}x^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\,x\left(1+\zeta+\lambda\,\frac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}\cdot 2\lambda\,\frac{L}{D^5}\,x = 0;$$

$$\left(1+\zeta+\lambda\,\frac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}\left(1+\zeta+\lambda\,\frac{L}{D^5}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x^2\cdot 2\lambda\,\frac{L}{D^5}\right) = 0;$$

$$1+\zeta+\lambda\,\frac{L}{D^5}\,x^2 - \frac{3}{2}x^2\cdot 2\lambda\,\frac{L}{D^5} = 0;$$

$$1+\zeta-2\lambda\,\frac{L}{D^5}\,x^2 = 0; \quad 1+\zeta-2\lambda\,\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4 = 0; \quad \frac{d}{D} = \sqrt[4]{\frac{1+\zeta}{2\lambda L/D}}.$$

Подстановка числовых значений и решение последнего уравнения приводят к результату $d = 0{,}17$ м.

КПД трубопровода может быть определен как отношение скоростного напора струи на выходе из трубопровода к располагаемому перепаду гидростатистических напоров:

$$\eta_{\text{тр}} = \frac{v^2/(2g)}{H} = \frac{H}{\left[1+\zeta+\lambda\,\dfrac{L}{D}\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]H} = \frac{1}{1+\zeta+\lambda\,\dfrac{L}{D}\left(\dfrac{d}{D}\right)^4};$$

$$\eta_{\text{тр}} = \frac{1}{1+0{,}04+0{,}02\cdot\dfrac{1000}{0{,}5}\left(\dfrac{0{,}17}{0{,}5}\right)^4} = 0{,}635; \quad \eta_{\text{тр}} = 64\ \%.$$

Задача 4.5. Из бака A, в котором поддерживается постоянный уровень, вода перетекает по сифонному трубопроводу (общая длина $l_1 = 20$ м; $d_1 = 40$ мм; $\lambda_1 = 0{,}0304$), имеющему приемный клапан с сеткой ($\zeta_{\text{к}} = 5$), в бак B, из которого сливается в атмосферу по трубопроводу ($l_2 = 100$ м; $d_2 = 60$ мм; $\lambda_2 = 0{,}0277$), включающему в себя задвижку ($\zeta = 10$) и сходящееся сопло ($d_{\text{с}} = 30$ мм; $\zeta_{\text{с}} = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}97$). Напор $H = 25$ м.

Определить: а) расход Q в системе; б) вакуум $p_{вс}$ в сечении $C–C$, расположенном выше уровня жидкости в баке A на высоту $h_с = 1$ м. Длина восходящей линии сифонного трубопровода до сечения $C–C$ $l_с = 6{,}5$ м. Потерями напора на плавных поворотах в трубопроводах пренебречь (рис. 4.9).

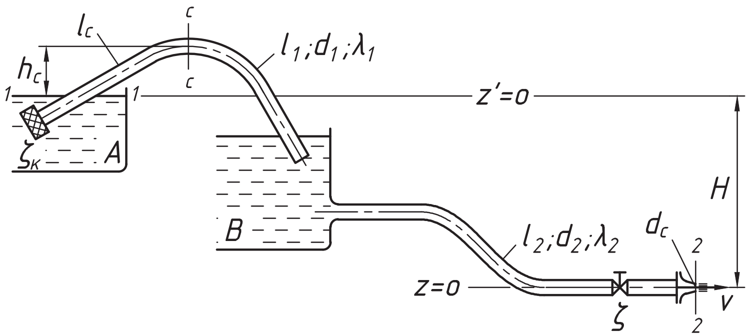


Рис. 4.9

Решение. а) Уравнение Бернулли, записанное для сечений *1–1* *2–2* (плоскость отсчета $z = 0$), имеет вид

$$H = h_п + \frac{v^2}{2g}(1+\zeta_с) = 0{,}0827 \cdot \left[\lambda_1 \frac{L_1}{d_1^5} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2^5} + (1+\zeta_с)\frac{1}{d_с^4 \varepsilon^2}\right] Q^2,$$

где v — средняя скорость струи при выходе из сопла; $\varepsilon = \dfrac{F_{стр}}{F_с} = \left(\dfrac{d_{стр}}{d_с}\right)^2 = 0{,}97$ — коэффициент сжатия струи; L_1 и L_2 — приведенные длины трубопроводов (местные сопротивления заменены эквивалентными длинами: $l_э = \zeta \dfrac{d}{\lambda}$);

$$l_{э1} = \frac{d_1}{\lambda_1}(\zeta_к + \zeta_{вых}) = \frac{0{,}04 \cdot 6}{0{,}0304} = 7{,}89 \text{ м};$$

$$l_{э2} = \frac{d_2}{\lambda_2}(\zeta_{вх} + \zeta) = \frac{0{,}06 \cdot 10{,}5}{0{,}0277} = 22{,}74 \text{ м};$$

$$L_1 = l_1 + l_{э1} = 20 + 7{,}89 = 27{,}89 \text{ м};$$

$$L_2 = l_2 + l_{э2} = 100 + 22{,}74 = 122{,}74 \text{ м}.$$

Подставляем числовые значения:

$$25 = 0{,}0827 \cdot \left[0{,}0304 \cdot \frac{27{,}89}{(0{,}04)^5} + 0{,}0277 \cdot \frac{122{,}74}{(0{,}06)^5} + \right.$$
$$\left. + (1 + 0{,}1) \cdot \frac{1}{(0{,}03)^4 \cdot (0{,}97)^2}\right] Q^2;$$

$$25 = 1\,165\,695 Q^2.$$

Решение этого уравнения приводит к результату

$$Q = 0{,}0046 \text{ м}^3/\text{с} = 4{,}6 \text{ л/с}.$$

б) Для определения вакуума $p_{\text{вс}}$ в сечении C–C запишем уравнение Бернулли для сечений *1–1* и C–C с новой плоскостью отсчета $z' = 0$:

$$\frac{p_{\text{вс}}}{\rho g} = h_{\text{с}} + 0{,}0827 \frac{Q^2}{d_1^4}\left[\lambda_1 \frac{l_{\text{с}}}{d_1} + (1 + \zeta_{\text{к}})\right] =$$
$$= 1 + 0{,}0827 \cdot \frac{(0{,}0046)^2}{(0{,}04)^4}\left[0{,}0304 \cdot \frac{6{,}5}{0{,}04} + (1 + 5)\right] = 8{,}22 \text{ м}.$$

Искомое значение вакуума равно

$$p_{\text{вс}} = 80\,638 \text{ Па} \cong 80{,}6 \text{ кПа}.$$

5. Расчет сложных трубопроводов

К категории сложных относятся трубопроводы, имеющие разветвленные участки и состоящие из нескольких труб (ветвей). Сечения трубопровода, в которых смыкаются несколько ветвей, называют узлами. Для каждого узла может быть составлен баланс расходов. В зависимости от конструктивного исполнения разветвленных участков различают следующие основные типы сложных трубопроводов: с параллельными ветвями, с концевой раздачей жидкости, с непрерывной раздачей жидкости, а также разнообразные сложные трубопроводы комбинированного типа.

Как и при расчете простого трубопровода (см. разд. 4), можно выделить три основные группы задач расчета сложных трубопроводов.

1. Определение перепадов напоров в питателях и приемниках для обеспечения требуемых расходов в трубах заданных размеров.

2. Определение расходов в трубах заданных размеров по известным перепадам напоров.

3. Определение размеров труб по заданным в них расходам и перепадам напоров в питателях и приемниках.

Для решения этих задач составляют систему уравнений, которые устанавливают функциональные связи между параметрами, характеризующими потоки жидкости в трубах, т. е. размерами труб, расходами жидкости и напорами. Эта система состоит из уравнений баланса расходов для каждого узла и уравнений баланса напоров (уравнений Бернулли) для каждой ветви трубопровода.

Так как обычно сложные трубопроводы являются длинными, в уравнениях Бернулли можно пренебрегать скоростными напорами, принимая полный напор потока в каждом расчетном сечении трубопровода практически равным гидростатическому и выражая его высотой пьезометрического уровня над принятой плоскостью отсчета. Кроме того, в сложных трубопроводах можно также пренебрегать относительно малыми местными потерями напора в узлах. Это значительно упрощает расчеты, поскольку позволяет считать одинаковыми напоры потоков в концевых сечениях труб, примыкающих к данному узлу, и оперировать в уравнениях Бернулли понятием напора в данном узле.

Потери напора в трубах выражаются формулой

$$h_{\text{п}} = 0{,}0827\lambda \frac{L}{d^5} Q^2,$$

где L — приведенная длина трубы, позволяющая учесть местные сопротивления в ней введением их эквивалентных длин:

$$L = l + l_{\text{э}}; \quad l_{\text{э}} = \sum \zeta \frac{d}{\lambda}.$$

Введение коэффициента $a = 0{,}0827\lambda \frac{L}{d^5}$ упрощает приведенную выше формулу, которая принимает вид

$$h_{\text{п}} = aQ^2.$$

Такая запись удобна для составления расчетной системы уравнений и ее решения.

В случае ламинарного режима движения жидкости потери напора в трубах могут быть определены по формуле

$$h_{\text{п}} = \frac{128\nu L}{\pi g d^4} Q.$$

По аналогии, введя коэффициент $b = \frac{128\nu L}{\pi g d^4}$, получаем

$$h_{\text{п}} = bQ.$$

Конкретный вид системы расчетных уравнений и способы ее решения (общий аналитический, графический) определяются типом сложного трубопровода и характером поставленной задачи. Для получения однозначного решения система расчетных уравнений должна быть замкнутой, т. е. число независимых неизвестных в ней должно быть равно числу уравнений.

Составленную систему уравнений для сложного трубопровода с заданными размерами при различных постановках задач расчета удобно решать в ряде случаев графически. Чтобы получить такое решение, прежде всего строят характеристики всех труб системы, используя уравнение $h_п = aQ^2$ ($h_п = bQ$). Характеристика представляет собой зависимость потерь напора в трубе от расхода. При турбулентном течении в трубе ее характеристика имеет форму параболы (квадратичный закон сопротивления), при ламинарном — прямой.

Ниже рассмотрены способы расчета нескольких видов сложных трубопроводов. В задачах предложены для анализа принципиальные схемы подачи жидкости под давлением от питателя к приемнику через сложный трубопровод с разветвленными участками. Питателями и приемниками в гидросистемах могут быть различные устройства — насосы, гидродвигатели, гидропневмоаккумуляторы, резервуары и др.

Задача 5.1. Для увеличения пропускной способности трубопровода длиной L и диаметром d к нему может быть присоединена параллельная ветвь, имеющая такой же диаметр и длину x (штрихпунктирная линия на рис. 5.1). Определить зависимость подачи жидкости в системе питатель — приемник от длины x при неизменном напоре H и при следующих законах гидравлического сопротивления: А — ламинарном; Б — квадратичном. Местными потерями напора пренебречь, считая, что трубопроводы длинные и в них преобладают потери на трение.

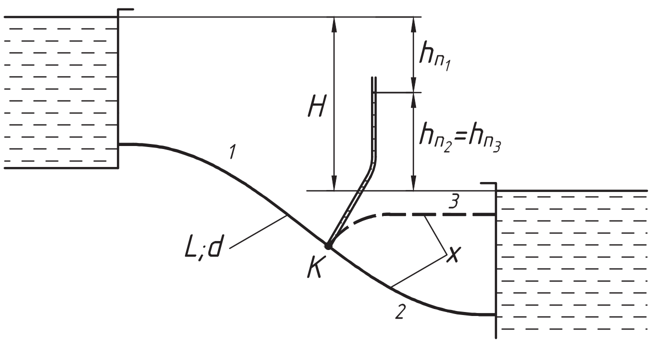


Рис. 5.1

Решение. А. Проведя нумерацию каждой ветви сложного трубопровода при ламинарном законе, воспользуемся тремя физическими принципами:

а) баланс расходов в узловой точке K:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3;$$

б) равенство потерь напора в параллельных ветвях. Ветви 2 и 3 являются параллельными, так как значения гидростатических напоров для них на входе и на выходе одинаковы. Следовательно,

$$h_{\text{п}2} = h_{\text{п}3}; \quad b_2 Q_2 = b_3 Q_3;$$

в) баланс напоров в системе:

$$H = h_{\text{п}1} + h_{\text{п}2} \quad (\text{или } H = h_{\text{п}1} + h_{\text{п}3});$$
$$H = b_1 Q_1 + b_2 Q_2.$$

В нашем случае $b_3 = b_2$, и тогда $Q_2 = Q_3 = Q_1/2$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем

$$H = \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) Q_1. \tag{5.1}$$

В общем случае при ламинарном режиме

$$h_{\text{п}} = \frac{128\nu L}{\pi g d^4}\, Q = bQ.$$

Следовательно, значения b_1 и b_2 пропорциональны длинам труб: $b_1 \sim (L - x)$; $b_2 \sim x$. Обозначим Q_0 расход при отсутствии параллельной ветви ($x = 0$) и Q_1 при ее наличии ($x > 0$). Тогда $Q_0 \sim H/L$, а $Q_1 \sim \dfrac{H}{(L - x) + x/2}$ в соответствии с формулой (5.1). Вычислив значение Q_1/Q_0, получим качественное соотношение, характеризующее изменение расхода при подсоединении параллельной ветви:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{L}{L - x/2} = \frac{1}{1 - x/2}.$$

Б. Система расчетных уравнений в случае турбулентного режима движения жидкости (в квадратичной зоне):

а) $Q_1 = Q_2 + Q_3$;

б) $a_2 Q_2^2 = a_3 Q_3^2$; $a_2 = a_3$;

в) $H = a_1 Q_1^2 + a_2 Q_2^2$; $H = (a_1 + a_2/4) Q_1^2$.

$$h_{\text{п}} = 0{,}0827\lambda\, \frac{L}{d^5}\, Q^2 = aQ^2; \quad \lambda = \text{const}.$$

Далее по аналогии с изложенным выше при $a_1 \sim (L - x)$ и $a_2 \sim x$ имеем

$$Q_0^2 \sim \frac{H}{L} \quad (\text{при } x = 0), \quad \text{или} \quad Q_0 \sim \sqrt{\frac{H}{L}};$$

$$Q_1^2 \sim \frac{H}{(L - x) + x/4} \quad (\text{при } x > 0), \quad \text{или} \quad Q_1 \sim \sqrt{\frac{H}{(L - x) + x/4}}.$$

В итоге

$$\frac{Q_1}{Q_0} \sim \sqrt{\frac{L}{L - \frac{3}{4}x}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3}{4}\frac{x}{L}}}.$$

Полученные результаты определения зависимости пропускной способности трубопровода от длины x параллельной ветви более наглядно можно представить на графиках (рис. 5.2).

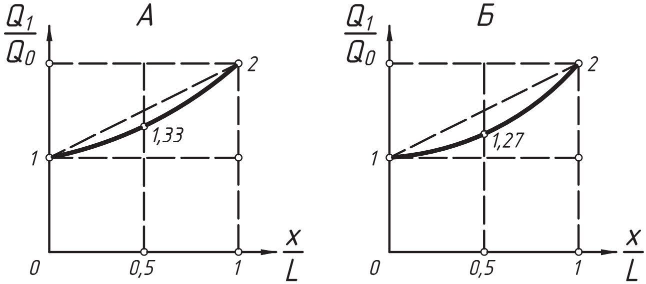
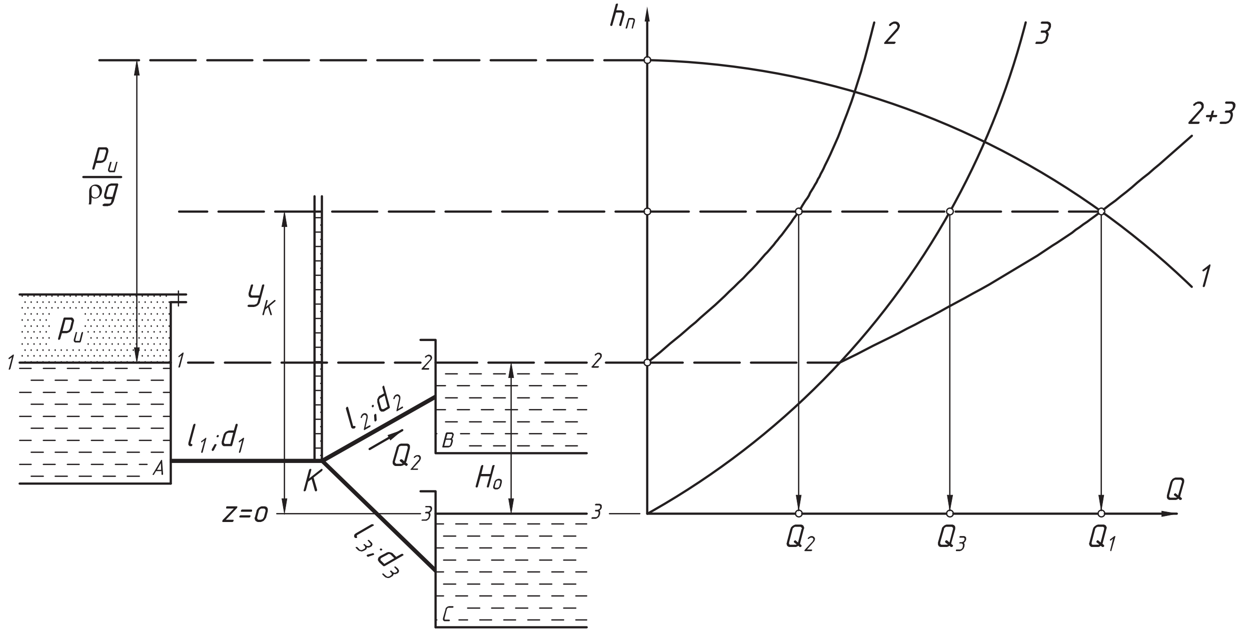


Рис. 5.2

Задача 5.2. Баки A, B, C соединены трубопроводами одинаковой длины $l_{1,2,3} = 50$ м и диаметром $d_{1,2,3} = 100$ мм (рис. 5.3). Высота уровней в резервуарах $H_0 = 8$ м. Принимая значения коэффициента сопротивления трения во всех трубопроводах равными $\lambda = 0{,}025$, определить расходы воды Q_1, Q_3 и избыточное давление $p_\text{и}$ на поверхности воды в баке A, при котором в бак B будет поступать расход $Q_2 = 16$ л/с. Учитывать только потери напора на трение по длине труб.

Решение. Выбрав плоскость отсчета $z = 0$, совпадающую с поверхностью уровня жидкости в баке C, записываем уравнение Бернулли для сечения *1–1* и сечения, проходящего через узловую



$h_п$
2
3
2+3
1
Q
Q_2
Q_3
Q_1
$\frac{p_и}{\rho g}$
$p_и$
y_K
$l_1;d_1$
$l_2;d_2$
$l_3;d_3$
Q_2
H_o
K
A
B
C
z=0

Рис. 5.3

точку K:

$$H_0 + \frac{p_и}{\rho g} = \left[z_K + \frac{p_K}{\rho g} \right] + 0{,}0827\lambda \, \frac{l_1}{d_1^5} \, Q_1^2. \qquad (5.2)$$

Уравнение Бернулли для сечения, проходящего через узловую точку K, и сечения *2–2*:

$$\left[z_K + \frac{p_K}{\rho g} \right] = H_0 + 0{,}0827\lambda \, \frac{l_2}{d_2^5} \, Q_2^2. \qquad (5.3)$$

Уравнение Бернулли для сечения, проходящего через узловую точку K, и сечения *3–3*:

$$\left[z_K + \frac{p_K}{\rho g} \right] = H_0 + 0{,}0827\lambda \, \frac{l_3}{d_3^5} \, Q_3^2. \qquad (5.4)$$

И, наконец, уравнение баланса расходов для узла K:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \qquad (5.5)$$

Введем обозначения: $\left[z_K + \frac{p_K}{\rho g} \right] = y_K$ — гидростатический напор в узловой точке K; $0{,}0827\lambda \, \frac{l}{d^5} = a$ — коэффициент, характеризующий гидравлическое сопротивление трубопровода.

Тогда уравнения (5.2)–(5.5), сведенные в расчетную систему уравнений, принимают вид

$$\begin{cases} H_0 + \dfrac{p_и}{\rho g} - y_K = a_1 Q_1^2; \\ y_K - H_0 = a_2 Q_2^2; \\ y_K = a_3 Q_3^2; \\ Q_1 = Q_2 + Q_3. \end{cases}$$

В нашем случае $a_1 = a_2 = a_3 = a = 0{,}0827 \cdot 0{,}025 \cdot \dfrac{50}{(0{,}01)^5} =$ $= 10\,377$ с^2/м^5. Тогда из уравнения (5.3) получим

$$y_K = H_0 + aQ_2^2 = 8 + 10\,337 \cdot (0{,}016)^2 = 10{,}65 \text{ м};$$

из (5.4) найдем

$$Q_3 = \sqrt{\frac{y_K}{a}} = \sqrt{\frac{10{,}65}{10\,337}} = 0,\ 032 \text{ м/с} = 32 \text{ л/с};$$

по (5.5) определим $Q_1 = 32 + 16 = 48$ л/с; в соответствии с уравнением (5.2) запишем $\frac{p_\text{и}}{\rho g} = y_K - H_0 + aQ_1^2 = 2{,}65 + 10\,337 \cdot (0{,}048)^2 =$ $= 26{,}47$ м. Следовательно $p_\text{и} = 260$ кПа. Решение полученной ранее системы уравнений для сложного трубопровода можно получить и графическим способом (см. рис. 5.3). Для этого сначала строят характеристики всех труб системы по уравнению $h_{\text{п}i} = a_i Q_i^2$, т. е. зависимость потерь напора в трубе от расхода. Далее необходимо графически сложить значения расхода, соответствующие кривым *2* и *3*, согласно уравнению (5.5). Ордината и абсцисса точки пересечения суммарной кривой *2 + 3* и кривой *1* дают соответственно значение напора y_K в узловой точке K и расхода Q_1. Точки пересечения горизонтальной линии, определяющей напор в узле, с кривыми *2* и *3* дают значения расходов Q_2 и Q_3.

Задача 5.3. Определить расходы воды Q_1, Q_2 и Q_3, поступающие под напором $H = 5$ м из открытого резервуара в баки-приемники (рис. 5.4). Трубы имеют одинаковую длину $l = 20$ м и диаметр $d = 100$ мм, коэффициент сопротивления трения $\lambda = 0{,}02$. Учитывать только потери напора на трение по длине труб и потери напора в вентиле при коэффициенте сопротивления $\zeta = 12$. Задачу решить в двух вариантах: I — $\zeta = 0$; II — $\zeta = 12$.

Решение. Основные уравнения, которые применимы для обоих вариантов:

уравнение баланса расходов для узла K:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3; \tag{5.6}$$

свойство параллельных трубопроводов (гидростатические напоры для труб 2 и 3 на входе и выходе одинаковы):

$$h_{\text{п}2} = h_{\text{п}3}; \tag{5.7}$$

уравнение баланса напоров в системе трубопроводов:

$$H = h_{\text{п}1} + h_{\text{п}2} \quad (\text{или } H = h_{\text{п}1} + h_{\text{п}3}). \tag{5.8}$$

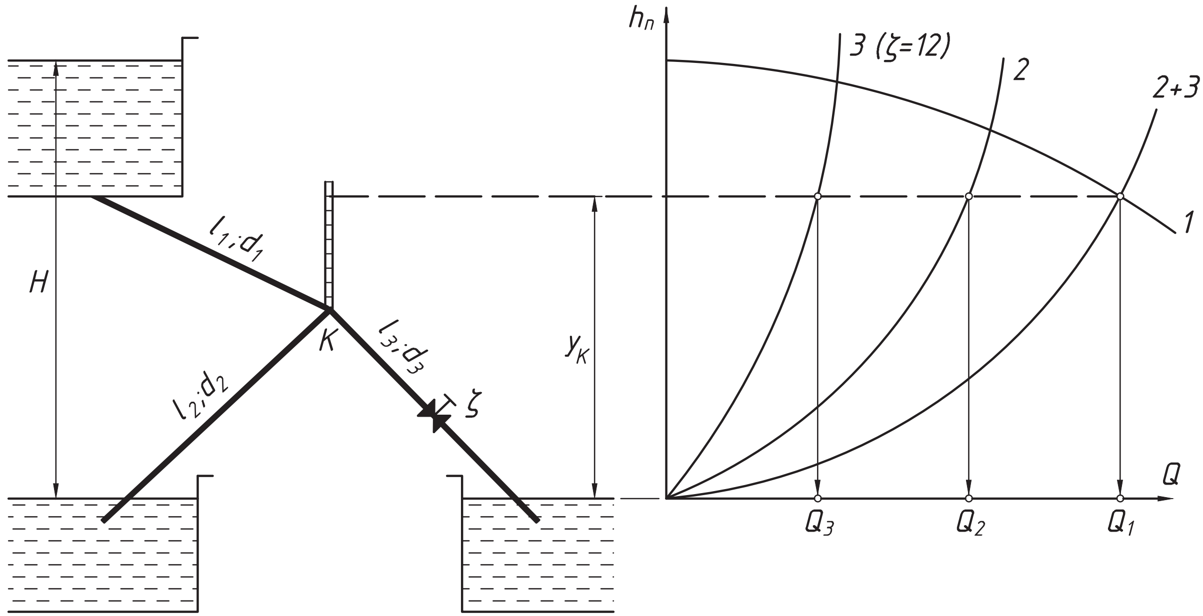


Рис. 5.4

Вариант I ($\zeta = 0$). По условию коэффициент гидравлического сопротивления труб

$$a_1 = a_2 = a_3 = a = 0,0827\lambda\,\frac{l}{d^5} = 0,0827 \cdot 0,02 \cdot \frac{20}{(0,01)^5} = 3308\ \text{с}^2/\text{м}^5.$$

Так как $Q_2 = Q_3$, то $Q_2 = Q_1/2$. Подставляя это выражение в уравнение (5.8), получим

$$H = aQ_1^2 + a\,\frac{Q_1^2}{4} = \frac{5}{4}\,aQ_1^2;$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{4}{5}\,\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3308}} = 0{,}0346\ \text{м}^3/\text{с}.$$

В итоге $Q_1 = 34{,}6$ л/с; $Q_2 = Q_3 = 17{,}3$ л/с.

Вариант II ($\zeta = 12$). Коэффициент гидравлического сопротивления для трубы 3

$$a_3 = 0{,}0827\lambda\frac{L}{d^5},$$

где $L = l_3 + l_{\text{экв}}$,

$$l_{\text{экв}} = d\,\frac{\zeta}{\lambda} = 0{,}1 \cdot \frac{12}{0{,}02} = 60\ \text{м}; \qquad L = 20 + 60 = 80\ \text{м};$$

$$a_3 = 13\,232\ \text{с}^2/\text{м}^5; \qquad a_1 = a_2 = a = 3308\ \text{с}^2/\text{м}^5.$$

Согласно уравнению (5.3) $a_2Q_2^2 = a_3Q_3^2$; $Q_2 = Q_3\sqrt{a_3/a_2} = 2Q_3$. Далее, используя уравнения (5.2) и (5.4), получим

$$Q_1 = Q_2 + \frac{Q_2}{2} = 1{,}5Q_2; \qquad H = a_1Q_1^2 + a_2\left(\frac{Q_1}{1{,}5}\right)^2 = \frac{3{,}25}{2{,}25}\,aQ_1^2;$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2{,}25}{3{,}25}\,\frac{H}{a}} = \sqrt{0{,}0692 \cdot \frac{5}{3308}} = 0{,}0316\ \text{м}^3/\text{с}.$$

В итоге $Q_1 = 31{,}6$ л/с; $Q_2 = Q_1/1{,}5 = 21{,}07$ л/с; $Q_3 = Q_2/2 =$ $= 10{,}53$ л/с.

Примечание. Задача может быть также решена графически после составления расчетной системы уравнений по методике, изложенной в предыдущей задаче. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} H_0 - y_K = a_1 Q_1^2; \\ y_K = a_2 Q_2^2; \\ y_K = a_3 Q_3^2; \\ Q_1 = Q_2 + Q_3. \end{cases}$$

Задача 5.4. Сифонный трубопровод составлен из трех труб, приведенные длины которых $L_1 = 40$ м, $L_2 = 80$ м, $L_3 = 100$ м и диаметры $d_1 = 80$ мм, $d_2 = 60$ мм, $d_3 = 80$ мм. Определить напор H, при котором суммарный расход воды через трубы 2 и 3 будет равен $Q_1 = 13$ л/с. Найти при этом напоре наименьшее давление p_x в трубопроводе, если $h = 2$ м и длина участка AB трубы 3 равна 15 м. Задачу решить в предположении квадратичной области сопротивления труб, приняв $\lambda_1 = 0{,}025$; $\lambda_2 = 0{,}028$; $\lambda_3 = 0{,}025$. Скоростными напорами пренебречь. Атмосферное давление принять равным 98,1 кПа (рис. 5.5).

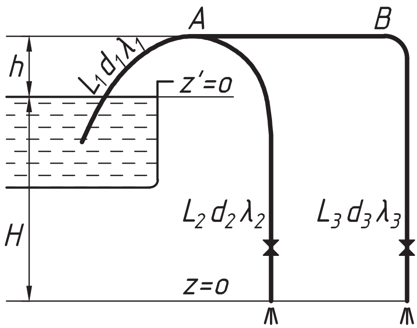


Рис. 5.5

Решение. Задачу предлагается решить методом эквивалентных труб. Параллельные трубы 2 и 3 заменяем одной эквивалентной трубой и, таким образом, сводим задачу к расчету простого трубопровода, который включает в себя трубу 1 и последовательно соединенную с ней эквивалентную трубу с общим расходом Q_1.

Коэффициент сопротивления эквивалентной трубы может быть определен по формуле

$$a_э = \frac{a_2 a_3}{\left(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}\right)^2}; \qquad \frac{1}{\sqrt{a_э}} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}}.$$

Коэффициенты a_2 и a_3 равны

$$a_2 = 0{,}0827\lambda_2 \frac{L_2}{d_2^5} = 0{,}0827 \cdot 0{,}028 \cdot \frac{80}{(0{,}06)^5} = 238\,230 \text{ с}^2/\text{м}^5;$$

$$a_3 = 0{,}0827\lambda_3 \frac{L_3}{d_3^5} = 0{,}0827 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{100}{(0{,}08)^5} = 63\,095 \text{ с}^2/\text{м}^5.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{a_э}} = \frac{1}{\sqrt{238\,230}} + \frac{1}{\sqrt{63\,095}}; \quad a_э = 27\,503 \text{ с}^2/\text{м}^5.$$

Коэффициент сопротивления указанного выше простого трубопровода равен $a_\Sigma = a_1 + a_э$, где

$$a_1 = 0{,}0827\lambda_1 \frac{L_1}{d_1^5} = 0{,}0827 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{40}{(0{,}08)^5} = 25\,238 \text{ с}^2/\text{м}^5,$$

тогда $a_\Sigma = 25\,238 + 27\,503 = 52\,741$ с^2/м^5.

Уравнение баланса напоров (уравнение Бернулли) для этого трубопровода $H = a_\Sigma Q_1^2$, т. е. $H = 52\,741 \cdot (0{,}013)^2 = 8{,}9$ м.

Рассматривая одно из уравнений баланса напоров сложного трубопровода, можно определить расход Q_3:

$$H = a_1 Q_1^2 + a_3 Q_3^2; \quad 8{,}9 = 25\,238 \cdot (0{,}013)^2 + 63\,095 Q_3^2;$$

$$Q_3 = 0{,}0086 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Примечание. Два последних уравнения Бернулли получены с выбранной плоскостью отсчета $z = 0$.

Абсолютное давление в трубопроводе будет наименьшим в сечении B трубы 3. Из записи двух уравнений Бернулли в абсолютной системе давления для участков L_1 и L_{AB} (плоскость отсчета $z' = 0$) можно получить

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} = h + \frac{p_x}{\rho g} + 0{,}0827\lambda_1 \frac{L_1}{d_1^5} Q_1^2 + 0{,}0827\lambda_3 \frac{L_{AB}}{d_3^5} Q_3^2;$$

$$10 = 2 + \frac{p_x}{\rho g} + 4{,}26 + 0{,}7; \quad \frac{p_x}{\rho g} = 3{,}04 \text{ м}; \quad p_x = 29{,}8 \text{ кПа}.$$

Примечание. В случае использования метода эквивалентных труб при ламинарном движении жидкости коэффициент сопротивления эквивалентной трубы может быть определен по формуле $\frac{1}{b_э} = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{b_3}$, где $b = \frac{128\nu L}{\pi g d^4}$.

Задача 5.5. К поршню гидроцилиндра диаметром $D = 65$ мм приложена внешняя сила $P = 1{,}4$ кН (рис. 5.6). Минеральное масло ($\delta = 0{,}9$; $\nu = 76$ сСт) подается в пункты A и B. Длины и диаметр маслопроводных труб: $l = 1$ м; $l_A = 1{,}5$ м; $l_B = 2{,}5$ м; $d = 10$ мм. Вертикальные расстояния $h_A = 1$ м и $h_B = 0{,}8$ м. Определить: а) подачу масла в каждый из пунктов A и B; б) скорость перемещения поршня $v_п$ в цилиндре. Скоростными напорами, местными потерями напора в трубах, утечками и трением в цилиндре пренебречь. Режим движения — ламинарный.

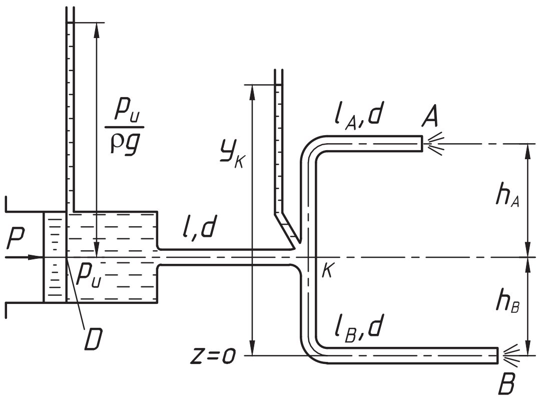


Рис. 5.6

Решение. а) Выбрав плоскость отсчета $z = 0$, составим систему расчетных уравнений для сложного трубопровода. Система состоит из трех уравнений баланса напоров (уравнений Бернулли) для каждой ветви трубопровода и уравнения баланса расходов для узла K:

$$\begin{cases} \left(h_B + \frac{p_и}{\rho g}\right) - y_K = bQ; \\ y_K - (h_A + h_B) = b_A Q_A; \\ y_K = b_B Q_B; \\ Q = Q_A + Q_B. \end{cases}$$

Предварительно можно определить следующие параметры:

$$p_{\text{и}} = \frac{4P}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 1400}{\pi \cdot (0{,}065)^2} = 422\,116 \text{ Па};$$

$$\frac{p_{\text{и}}}{\rho g} = 47{,}81 \text{ м};$$

$$b = \frac{128\nu L}{\pi g d^4} = \frac{128 \cdot 0{,}76 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{\pi \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}01)^4} = 31\,581 \text{ с/м}^2;$$

$$b_A = 47\,371 \text{ с/м}^2; \quad b_B = 78\,952 \text{ с/м}^2.$$

Выражая расходы Q, Q_A и Q_B из первых трех уравнений системы и подставляя их значения в уравнение баланса расходов для узла K, можно получить значение гидростатического напора в узле:

$$\left(z_K + \frac{p_K}{\rho g}\right) = y_K = 24{,}15 \text{ м}.$$

Тогда значения расходов равны

$$Q = 0{,}000\,77 \text{ м}^3/\text{с} = 0{,}77 \text{ л/с}; \quad Q_A = 0{,}47 \text{ л/с}; \quad Q_B = 0{,}30 \text{ л/с}.$$

Подача масла в пункты A и B равна соответствующим расходам.

б) Скорость перемещения поршня в цилиндре

$$v_{\text{п}} = \frac{4Q}{F_{\text{п}}} = \frac{4 \cdot 0{,}000\,77}{\pi \cdot (0{,}065)^2} = 0{,}23 \text{ м/с}.$$

Литература

Башта Т. М., *Руднев С. С.* Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.: Альянс, 2010.

Гидридов А. Д. Техническая механика: Учеб. для втузов. М.: Машиностроение, 1987.

Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газов М.: Наука, 1987. 840 с.

Никитин О. Ф. Гидравлика и гидропневмопривод: Учеб. пособие для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012.

Руднев С. С., *Подвидз Л. Г.* Лабораторный курс гидравлики, насосов и гидропередач: Учеб. пособие для втузов. М.: Машиностроение, 1974.

Сборник задач по машиностроительной гидравлике / Д. А. Бутаев, З. А. Калмыкова, Л. Г. Подвидз и др.; Под ред. И. И. Куколевского и Л. Г. Подвидза. М.: Машиностроение, 2009.

Шабловский А. С. Выполнение домашних заданий и курсовых работ по дисциплине «Механика жидкости и газа». Ч. 1: Гидростатика, 2012.

Оглавление

Учебное издание

Шабловский Александр Сергеевич

Выполнение домашних заданий и курсовых работ
по дисциплине «Механика жидкости и газа»
Часть 2
Гидродинамика

Учебное пособие

Редактор *С. А. Серебрякова*
Корректор *Е. К. Кошелева*
Компьютерная верстка *М. А. Голуба*

Подписано в печать 26.11.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,95. Тираж 100 экз.
Изд. № 125. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Для заметок