

УДК 519.2+517.9

Посвящается столетию со дня рождения
Леонида Витальевича Канторовича

Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы

В. И. Богачев, А. В. Колесников

В статье дается обзор недавних исследований, связанных с задачей Монжа–Канторовича. Приведены основные результаты о существовании решений и их свойствах как в задаче Монжа об оптимальной транспортировке, так и в задаче Канторовича об оптимальном плане, а также результаты о связях между обеими задачами и случаях их равносильности. Рассказано о многообразных приложениях этих задач в нелинейном анализе, теории вероятностей, дифференциальной геометрии.

Библиография: 193 названия.

Ключевые слова: задача Монжа, задача Канторовича, метрика Канторовича–Рубинштейна, оптимальная транспортировка, транспортное неравенство.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Задача Канторовича	11
1.1. Метрики Канторовича и нормы Канторовича–Рубинштейна	11
1.2. Существование оптимальных планов	19
1.3. Двойственность Канторовича	23
Глава 2. Задача Монжа	26
2.1. Существование и единственность оптимальных отображений	26
2.2. Регулярность решений и априорные оценки	31
2.2.1. Принцип максимума	32
2.2.2. Регулярность решений уравнения Монжа–Ампера	33
2.2.3. Классический подход	34
2.2.4. Регулярность в пространствах Гёльдера и Соболева	36
2.2.5. Глобальные оценки и приложения	37
2.3. Связи с задачей Канторовича и приближенные решения	39

Глава 3. Приложения	47
3.1. Изопериметрические неравенства и неравенство Брунна–Минковского	47
3.2. Неравенства Соболева и их обобщения	49
3.2.1. Классические неравенства Соболева	49
3.2.2. Логарифмические неравенства Соболева	50
3.2.3. Равномерно выпуклые потенциалы	54
3.2.4. Ограниченность снизу второй производной и интегрируемость	55
3.3. Транспортные неравенства	56
3.4. Неравенства концентрации и большие отклонения	61
3.5. Иерархия неравенств	62
3.6. Геодезические в пространстве мер и градиентные потоки	63
3.6.1. Геодезические в метрике Канторовича	63
3.6.2. Формула Бенаму–Бренье	65
3.6.3. Динамический план переноса массы	66
3.6.4. Выпуклые функционалы	67
3.6.5. Дополнительные свойства пространства $\mathcal{P}^p$	69
3.6.6. Субдифференциалы	70
3.6.7. Градиентные потоки. Формализм Отто	71
3.6.8. Приложения к уравнениям математической физики	73
3.6.9. Риманов объем на $\mathcal{P}^2$	74
3.7. Геометрические приложения	75
3.7.1. Классические задачи дифференциальной геометрии	75
3.7.2. Задача Монжа–Канторовича на римановом многообразии. Существование и единственность	77
3.7.3. Задача Монжа–Канторовича на римановом многообразии. Замена переменных, тензор Риччи и геометрические неравенства	79
3.7.4. Пространства неотрицательной кривизны	82
3.7.5. Геометрические потоки: потоки гауссовой кривизны и параболические уравнения	85
3.7.6. Геометрические потоки: потоки Риччи	87
3.7.7. Транспортные сети	89
3.8. Бесконечномерные задачи Монжа–Канторовича	90
3.8.1. Существование оптимальных отображений на пространстве Винера	90
3.8.2. Формула замены переменной	97
3.9. Некоторые другие виды преобразований мер	98
3.9.1. Треугольные отображения	98
3.9.2. Преобразования Мозера, полугруппы, транспортные уравнения	100
Список литературы	100

СОДЕРЖАНИЕ

Богачев В. И., Колесников А. В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы.....	3
Бухштабер В. М. Комплексные кобордизмы и формальные группы.....	111

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Сообщения Московского математического общества	175
Штогрин М. И. Критерий вырожденности выпуклого многогранника	175
Рахманов Е. А., Суетин С. П. Асимптотика полиномов Эрмита–Паде I рода для пары функций, образующей систему Никишина.....	177

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Фридрих Хирцебрух (к 85-летию со дня рождения)	179
Александр Данилович Александров (к 100-летию со дня рождения) <i>С. С. Кутателадзе, С. П. Новиков, Ю. Г. Решетняк</i>	180
Владимир Александрович Марченко (к 90-летию со дня рождения) <i>Ю. М. Березанский, В. Е. Захаров, В. П. Котляров, К. В. Маслов, С. П. Новиков, Л. А. Пастур, Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Самойленко, Е. Я. Хруслов</i>	186